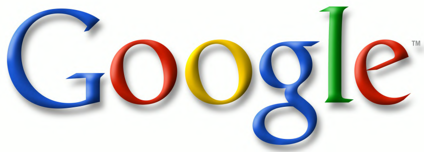
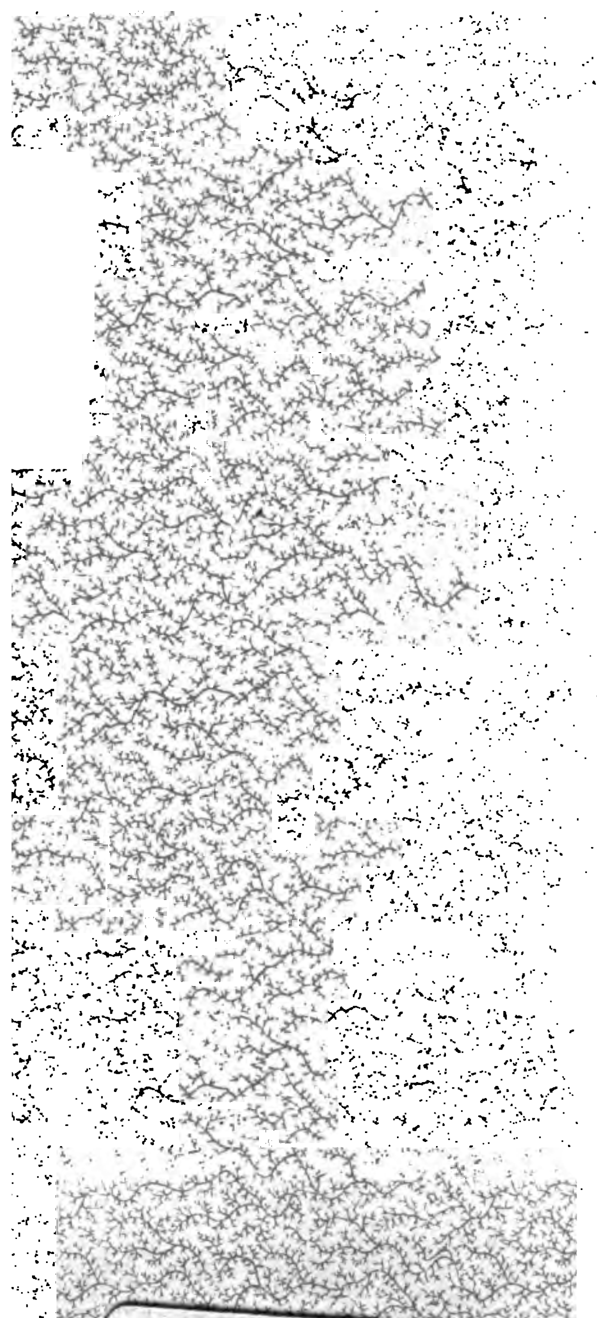
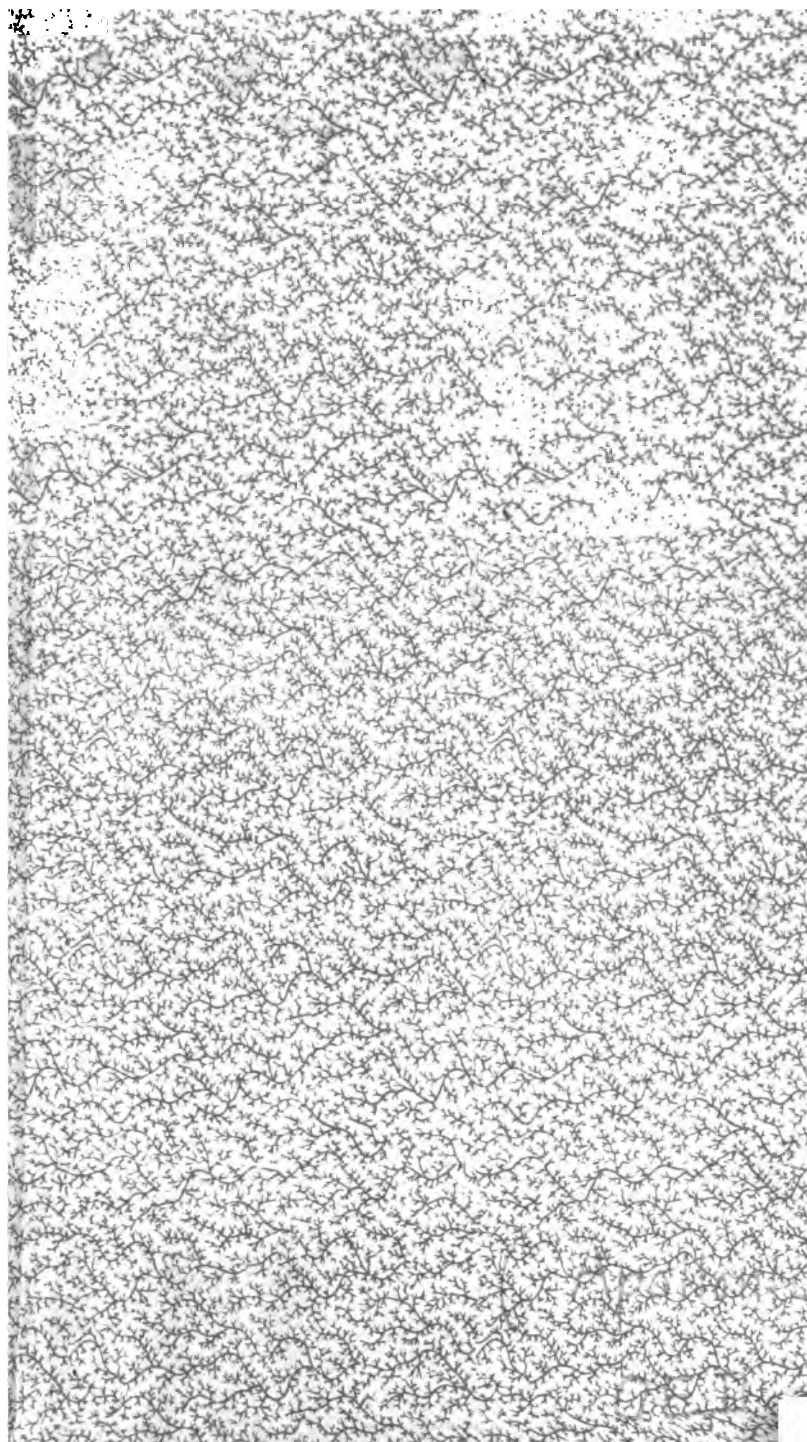
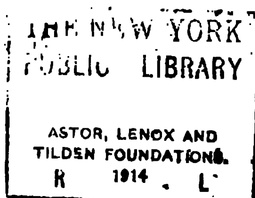









THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.
R 1914 L

APOLLONII
DE TACTIONIBUS

QUAE SUPERSUNT,

AC MAXIME LEMMATA PAPPI

IN HOS LIBROS

GRAECE NUNC PRIMUM EDITA

E CODICIBUS MSCPTIS,

CUM

VIETAE LIBRORUM APOLLONII

RESTITUTIONE,

ADJECTIS OBSERVATIONIBUS, COMPUTATIONIBUS,

AC PROBLEMATIS APOLLONIANI HISTORIA

A

JOANNE GUILIELMO CAMERER.

GOTHAE,
APUD CAR. GUILIELM. ETTINGER,

ET AMSTELODAMI,
APUD J. ST. VAN ESVELDT HOLTROP ET SOC.
1795.

mi, aliorumque ejus aetatis Geometrarum opinio, rem facere perutilem eos, qui pleniorem rerum Mathematicarum cognitionem assequi cupiant, si perceptis Geometriae Elementis non statim satis sibi in ea re sapere videantur, ac ad altiora doctrinae capita incerto adhuc gradu progredi properent, sed ea potius, quae didicerint, altius subinde animo infigere, et vel maxime variis quaestionibus Geometricis accurate solvendis applicare enitantur. In horum itaque usum *) conscripserant libros, quos appellabant Analyticos, in quorum numero etiam nostros hos Pappus refert, eorumque lectione ac meditatione adolescentes debitum in demonstrando rigorem, ac in solvendo aliquo Problemate elegantiam addiscere, atque sibi ipsis aliquam in inveniendo sagacitatem, in distinguendis autem variis ejusdem Problematis Casibus subtilitatem comparare posse putabant. Quum vero per plura deinceps secula foeda Barbaries orbem terrarum occupasset, etiam libri isti Analytici, quorum utilitatem homines indocti haud intelligebant, adeo neglecti fuerant, ut e triginta tribus, quos Pappus enumerat, praeter Euclidis Data, atque Apollonii Conicorum libros quatuor priores, reliqui omnes interirent, nisi quod trium adhuc librorum Conicorum, ac duorum de Sectione Rationis Arabica Versio ad nos pervenerit. Felici tamen casu accidit, ut plerorumque Summam Pappus in Collectionum Mathematicarum libro septimo enarraret, ac simul Lemmata exhiberet, quibus in libris istis Veteres usos fuisse videbat, unde recentioris aetatis Mathematici plures perdita ista antiquiorum Opera magis minus pros-

*) Vid. Pappi Praef. in Lib. VII. Collect. Mathem.

prospero successu restituere conati sunt. Et primus quidem Vieta, doctissimus seculi decimi sexti Geometra, praecipuum casum Problematis de Tactionibus Adriano Romano Belgae solvendum proposuerat, eum nempe, quo circulus jubetur describi, qui tres in eodem plano positione ac magnitudine datos circulos contingat. Id quum Adrianus Romanus duarum Hyperbolarum ope efficere voluisset, Vieta hac Solutione parum contentus, utpote quae aliena ipsi a Geometrarum usu videbatur, ex quo in Solutione Problematum, quae plana vocant, nonnisi circuli ac rectae adhiberi debent, ipse universum illud de Tactionibus Problema methodo magis geometrica solutum dedit, edito anno 1600 Parisiis libello, quem Apollonii Galli nomine inscribebat. Quo opere adeo delectatus est Adrianus, ut eo viso statim Herbipoli, ubi tum morabatur, in Galliam proficisceretur, atque intimam cum Vieta nunquam ante viso amicitiam iniret, qui etiam ipse benevole admodum hospitem excepit; et postquam integrum mensem una fuerant, suis sumtibus ad limites reducendum curavit *). Atque haud mirum, Vietae libellum Adriano Romano adeo placuisse: scriptus enim est mira elegantia, ac Problemata difficiliora methodo plane Geometrica ad faciliora semper ac planiora reducit. Neque tamen Vieta nobis ipsos Apollonii libros, quales ab auctore profecti sunt, exhibuisse censendus est. Nam Apollonii opus duobus libris absolutum fuisse novimus, Vietae contra libellus octo fere plagulis comprehenditur. Deinde Lemmata, quibus Apollonium usum fuisse Pappus testatur, a Vieta

*) Vid. Thuan. Histor. Libr. CXXIX. ad finem.



★ Anon.

Köstler — 1 fl 28 —
bruch — — 6
1 — 54 —

Adriani Romani problema Apollonianum, quo, datis tribus circulis, quaeritur quartus eos contingens. Herbipoli, 1596, 4to.

(Desselii bibliotheca belgica; Lovanii, 1643 4to. — pag. 15.)

198 — F —

APOLLONII
DE TACTIONIBUS

QUAE SUPERSUNT,

AC MAXIME LEMMATA PAPPI

IN HOS LIBROS

GRAECE NUNC PRIMUM EDITA

E CODICIBUS MSCPTIS,

CUM

VIETAE LIBRORUM APOLLONII

RESTITUTIONE,

ADJECTIS OBSERVATIONIBUS, COMPUTATIONIBUS,

AC PROBLEMATIS APOLLONIANI HISTORIA

A

JOANNE GUILIELMO CAMERER.

GOTHAE,
APUD CAR. GUILIELM. ETTINGER,

ET AMSTELODAMI,
APUD J. ST. VAN ESVELDT HOLTROP ET SOC.
1795.

ma, quaecunque ſit datorum poſitio, nunquam prorſus conſtrui queat,' v. c. ſi quis ducat ad unum circulorum datorum rectam contingentem, ita ut circuli dati omnes ſint ex eadem hujus rectae parte, jubeat vero circulum deſcribere, qui ſit ex adverſa hujus contingentis parte. Atque haec fere ſunt, quae de Problemate Apolloniano publici juris facta mihi innotuerunt *).

Patet

*) In Gaſſendi Operibus Tom. VI. Florent. 1727. p. 393 extat Athanaſii Kircheri ad Gaſſendum Epiſtola anno 1634 ſcripta, in qua haec verba ſunt: „Cenſeo librum qui intitulatur Apollonius Ligur, compoſitum a Ioanne Auſuſtio Genuenſi, in quo de Inclinationibus et Contactibus ſubtiliſſima quaevis demonſtrantur." An vero Apollonius iſte Ligur unquam in lucem prodierit, haud ſcio. Acta philoſ. Societ. reg. in Anglia anni 1668 edita ab Oldenburgio Amſtel. 1674 in Capite inſcripto: Enarratio quorundam librorum, haec habent: Nr. 2. Introductio ad Algebram, translata ex Germanico in Anglicum per Thom. Branker M. A. plurimum variata et translata per I. P. Impreſſa Londini in 4to et deinde p. 121 haec adduntur: „Quod concernit reliquam partem Libri, prout fuerat editus per Io. Henr. Rahn Germanico ſermone, rationes dari poſſunt, cur fuerit omiſſa in editione Anglica. Prima ejus pars agit de contactu circulorum, circa quod argumentum quaedam epiſtolae Carteſii editae ſunt in tertio Volumine Epiſtolarum ejus poſthumarum. De his Brankeri et Rahnii libris intelligenda ſine dubio ſunt, quae in Benghemii Bibliographia Mathematica p. 222 leguntur: Th. Branker translated out of High-duch in to Engliſh an Introduction to Algebra, much altered and augmented by D. P. London 1666. et p. 358. Ioh. Heinr. Rahnen Teutſche Algebra, oder algebraiſche rechenkünſtige Auflöſung verworrener mathematiſcher Aufgaben etc. Zürich 1658 4vo. Lambertus d. g. Briefw. 1ſter Band S. 314 ait, meminiſſe ſe legere Diſſertationem

Patet inde, poſt tot tantorum Virorum in Problemate Apolloniano labores deſiderari tamen adhuc plenam ac genuinam Apollonii librorum reſtitutionem, quam cum magna ex parte paratam jam atque elaboratam habeam, non tamen conſultum eſſe videtur, noſtra aetate de edendo Opere hujus generis, quod ex ipſa rei natura, diſtinctis nempe variis Problematis Caſibus, iisque more Antiquorum uberius explicatis, non poteſt non prolixum eſſe, ſerio cogitare. Non tamen inutile fore putavi, rationem ſaltim, qua plena ejusmodi Reſtitutio inſtitui debeat, in quibusdam certe, iisque praecipuis Problematis Apolloniani Caſibus, explicatius aliquantum oſtendere, quo facilius vel Viris Doctis de inter-

tionem Academicam, quae Caſum, quo tres circuli dati ſe contingant, Calculo Algebraico ſatis prolixo perſequatur. Daviſſon (Lamb. d. g. Briefw. IV. B. S. 423.) Lamberto ſcribit, Kühnium ſibi dediſſe Solutionem Analyticam (Algebraicam ut videtur) Problematis de circulo, qui tres datos contingat. Ad caſum, quo duo puncta cum circulo data ſunt, Lawſon laudat adhuc Hugonem de Omerique. Wöldike de eodem Problemate egiſſe dicit W. Emerſon in Treatiſe of Algebra London 1766 8vo. Idem refert, Geuſſium, Matheſeos olim apud Havnienſes Profeſſorem in Programmate Academico hiſtoriam hujus Problematis diligenter et erudite expoſuiſſe. Caeterum maxime faciliores illi Caſus, quibus data ſunt duo puncta cum recta, vel duae rectae cum puncto a pluribus Mathematicis, v. g. a Zumklego (Exercitationes Analytico-Syntheticae) Maudito, aliisque tractati fuerunt. Antequam Hiſtoriae hujus Problematis finem faciam, liceat grato animo profiteri, me haud pauca eo pertinentia debere ſingulari erga me benevolentiae Doctiſſimi Pfleiderer, Matheſeos in Univerſitate Tubingenſi Profeſſoris, Viri de me, meisque ſtudiis optime meriti.

interna librorum Apollonii natura, ac de usu Lemmatum, quae Pappus conservavit, certius aliquid constet, vel Tirones exemplum habeant Problematis copiosissimi in Casus suos rite divisi. Calculum, quem ad nonnullos praecipuos Problematis Casus addidi, ita institui, ut omnia, missis, quas hactenus fere omnes adhibebant, Substitutionibus, ad prima statim Elementa revocarentur. Antea vero ipsa Lemmata, quae ex Pappo huc pertinent, exhibenda, atque ubi opus est, illustranda, iisque, ut integri quid haberent Lectores, Vietae librorum Apollonii Restitutionem subnectendam putavi. In citandis Euclidis Elementis usus sum Editione Baermanniana, in Datis vero Versione germanica Schwabiana.

Ex Pappi Praefatione Lib. VII. Collect. Mathem.

Περὶ ἐπαφῶν βιβλία β.

Ἑξῆς τούτοις (τοῖς περὶ διωρισμένης τομῆς) τῶν ἐπαφῶν ἐστι βιβλία δύο. Προτάσεις δὲ ἐν αὐτοῖς δοκοῦσιν εἶναι πλείονες, ἀλλὰ καὶ τούτων μίαν τίθεμεν οὕτως ἔχουσαν· ἐξῆς*) σημείων καὶ εὐθειῶν καὶ κύκλων τριῶν ὁποιωνοῦν θέσει δοθέντων, κύκλον ἀγαγεῖν δι' ἑκάστου τῶν δοθέντων σημείων, εἰ δοθείη, ἐφαπτόμενον ἑκάστης τῶν δοθεισῶν γραμμῶν. Ταύτης διὰ πλήθη τῶν ἐν ταῖς ὑποθέσεσι δεδομένων ὁμοίων ἢ

*) Legendum forte ἐκ σημείων etc.

ἢ ἀνομοίων κατὰ μέρος διαφόρας προτάσεις ἀναγκαῖον γίνεσθαι δέκα. Ἐκ τῶν τριῶν γὰρ ἀνομοίων γενῶν τριάδες διάφοροι ἄτακτοι γίνονται δέκα. Ἤτοι γὰρ τὰ δεδομένα, τρία σημεῖα, ἢ τρεῖς εὐθεῖαι, ἢ δύο σημεῖα καὶ εὐθεῖα, ἢ [2]) δύο εὐθεῖαι καὶ σημεῖον, ἢ δύο σημεῖα καὶ κύκλος, ἢ δύο κύκλοι καὶ σημεῖον, ἢ [3]) δύο εὐθεῖαι καὶ κύκλος, ἢ δύο κύκλοι καὶ εὐθεῖα, ἢ σημεῖον καὶ εὐθεῖα καὶ κύκλος, ἢ τρεῖς κύκλοι. Τούτων δύο μὲν τὰ πρῶτα δέδεικται ἐκ τοῦ τετάρτου βιβλίου τῶν πρώτων στοιχείων, ὅπερ ἦμεν γράφων. Τὸ μὲν γὰρ τριῶν δοθέντων σημείων μὴ ἐπ' εὐθείας ὄντων τὸ αὐτό ἐστι τῷ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι· τὸ δὲ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν μὴ παραλλήλων οὐσῶν, ἀλλὰ τῶν τριῶν συμπιπτουσῶν, τὸ αὐτό ἐστι τῷ εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι. Τὸ γὰρ δύο παραλλήλων οὐσῶν, καὶ μιᾶς ἐμπιπτούσης, ὡς μέρος ὂν τῆς β ὑποδιαιρέσεως προγράφεται ἐν τούτοις πάντων. Καὶ τὰ [4]) ἑξῆς ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. Τὰ δὲ λειπόμενα δύο, τὸ δύο δοθεισῶν

[2]) Libri Mſcpti, et Halley, qui Praefationem Pappi Editioni ſuae Librorum de Sectione Rationis praefixit, legunt: καί. [3]) Hoc ordine libri Mſpti enumerant Caſus. In Editione Halleyi verba: ἢ σημεῖον καὶ εὐθεῖα καὶ κύκλος poſita ſunt ante verba: ἢ δύο εὐθεῖαι καὶ κύκλος, quem ordinem habet quoque Verſio Commandini. At veriſimile eſt, Commandinum pariter ac Halleyum ordinem ideo ſolum mutaſſe, quod Pappus poſtea caſum, quo duae rectae cum circulo datae ſunt, ſecundo libro tractatum eſſe dicit. Haec vero ratio vix ſufficere videtur ad lectionem mutandam. Neque enim neceſſe erat, ut Pappus eodem omnia ordine enarraret, quo erant apud Apollonium. Et infra patebit, alio adhuc Caſu Pappum ordinem tenuiſſe diverſum ab Apolloniano. [4]) Forte legendum τῶν ἑξῆς: lectionem tamen τὰ ἑξῆς etiam ſenſu ſatis commodo interpretari licet.

δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ κύκλου, ἢ τριῶν δοθέντων κύκλων, μόνα ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ, διὰ τὰς πρὸς ἀλλήλους θέσεις τῶν κύκλων τε καὶ εὐθειῶν πλείονας οὔσας, καὶ πλειόνων διορισμῶν δεομένας. Ταῖς προειρημέναις ἐπαφαῖς ὁμογενὲς πλῆθός ἐστι προβλημάτων, παραλιπόμενον ἀπὸ τῶν ἀναδιδόντων, καὶ προσανέδωκαν τινες πρότερον τῶν εἰρημένων δύο βιβλίων. Εὐσύνοπτον γὰρ καὶ εἰσαγωγικὸν μᾶλλον ἦν, ἐντελές τε καὶ συμπληρωτικὸν τοῦ γένους τῶν ἐπαφῶν. Πάλιν μιᾷ περιλαβὼν ἃ παντα προτάσει, ἣ τῆς προειρημένης λείπουσα μὲν ὑποθέσει, περιττεύουσα δ' ἐπιτάγματι οὕτως ἔχει. Ἐκ σημείων, καὶ εὐθειῶν, καὶ κύκλων, ὁποιωνοῦν δύο δοθέντων, κύκλον γράψαι τῷ μεγέθει δοθέντα, διὰ τοῦ δοθέντος σημείου, ἢ τῶν δοθέντων παραγινόμενον, εἰ δοθείη, ἐφαπτόμενον δὲ ἑκάστης τῶν δεδομένων γραμμῶν. Αὕτη περιέχει προβλημάτων ἤδη τὸ πλῆθος ἕξ. Ἐκ τριῶν γὰρ διαφόρων τινῶν δυάδες ἄτακτοι διάφοροι γίνονται τὸ πλῆθος ἕξ. Ἤτοι γὰρ δύο δοθέντων σημείων, ἢ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἢ δύο δοθέντων κύκλων· ἢ σημείου καὶ εὐθείας, ἢ σημείου καὶ κύκλου, ἢ εὐθείας καὶ κύκλου τὸν δεδομένον μεγέθει κύκλον διαγαγεῖν δεῖ, ὡς εἴρηται, ταῦτα δὲ ἀναλῦσαι, καὶ συνθεῖναι, καὶ διορίζεσθαι κατὰ πτῶσιν. Ἔχει δὲ τὸ πρῶτον τῶν ἐπαφῶν προβλήματα ζ. τὸ δὲ δεύτερον προβλήματα δ. Λήμματα δ' ἔχει τὰ δύο βιβλία κγ. [5]) αὐτὰ δὲ θεωρήματά ἐστιν ξ.

[5]) MSS. pariterque Halleyus ac Commandinus habent unum et viginti. At quum postea Pappus ipse non enumeret tantum sed exhibeat omnino tria et viginti, aut si Lemma undecimum, quod duas potius continet Propositiones, pro duobus censeas, quatuor et viginti Lemmata, legendum videtur κγ aut κδ. Reliqui etiam numeri, quos hic ex MSS. fide dedi, nescio an non vitiosi sint.

De Tactionibus Libri duo.

Libros de Sectione determinata excipiunt duo de Tactionibus libri. Plures quidem in iis inesse videntur Propositiones, attamen etiam has una complectemur ita habente: E punctis, rectis, ac circulis tribus quibuscunque (in eodem plano) positione datis, circulum describere, qui per singula data puncta, siquidem puncta data sint, transeat idemque singulas datas lineas contingat. Inde pro multitudine eorum, quae per hypotheses data sunt, similium aut dissimilium generum, necessario decem diversae oriuntur propositiones particulares. Ex tribus quippe dissimilibus generibus decem diversae triades inordinatae *) componuntur. Data

*) Retinui in his verbis traductionem Celeberrimi Halleyi in ejus Edit. Librorum Apollonii de Sectione Rationis p. XXXII. Caeterum, quas ille Triades, Duades inordinatas vocat, alii Conternationes, Combinationes, ac generatim Complicationes appellant. Vid. Hindenburg Novi System. Permut. Combin. ac Variat. primae Lineae §. 2. nr. 18. et 15. Numerus vero Complexionum Exponentis m a rebus datis diversis multitudine n, admissis repetitionibus, exhibetur formula:

$$\frac{n.n+1.n+2\ldots n+m-1}{1.2.3\ldots m}$$

Vid. ibid. §. III. nr. 24 a, unde hic, quum sit $n=m=3$, habebimus 10 Conternationes, infra vero, ubi $n=3, m=2$, obtinebimus 6 Combinationes.

ta enim sunt vel tria puncta; vel tres rectae; vel duo puncta et recta; vel duae rectae et punctum; vel duo puncta et circulus; vel duo circuli et punctum; vel duae rectae et circulus; vel duo circuli et recta; vel punctum et recta et circulus; vel tres circuli. Horum duo quidem prima Problemata demonstrantur in libro quarto primorum Elementorum, ut (jam ante tibi) scripsi. Nam per tria data puncta, quae non sint in eadem recta, ducere circulum, idem est ac dato triangulo circulum circumscribere: Problema autem de tribus rectis datis, non parallelis, sed inter se concurrentibus, idem est, ac dato triangulo circulum inscribere: casus vero duarum parallelarum, quibus tertia occurrit, in his Apollonii libris tanquam pars secundae Propositionis particularis reliquis praemittitur. Ad sequentia vero quod attinet Problemata, sex priore libro comprehenduntur. Reliqua deinde duo, ubi nempe data sunt duae rectae et circulus, vel tres circuli, sola continentur libro posteriore, ob varias circulorum aeque ac rectarum inter se positiones, pluresque, quibus opus est, determinationes. Dictis his Tactionibus congener est ordo Problematum praetermissus ab Editoribus: nonnulli vero duobus his libris praefixerunt. Intellectu enim facilis, et magis introductorius erat Tractatus iste, et ad plenam de Tactionibus doctrinam absolvendam maxime idoneus. Omnia rursus una complectar Propositione, quae quidem praecedente magis contracta est quoad Hypothesin, superaddita autem est conditio ad Constructionem, et ita habet: E punctis, rectis, ac circulis datis duobus quibuscunque (in eodem plano positis), circulum describere magnitudine datum, qui

per

per punctum, vel puncta data, ſiquidem puncta data ſint, tranſeat, idemque ſingulas datas lineas contingat. Continet haec Propoſitio ſex Problemata. E tribus enim diverſis generibus fiunt Duades inordinatae diverſae numero ſex. Vel enim datis duobus punctis; vel duabus rectis; vel duobus circulis; vel puncto et recta; vel puncto et circulo; vel recta et circulo oportet circulum magnitudine datum deſcribere, ut diximus. Haec autem reſolvenda ſunt, et componenda, et determinanda juxta Caſus. Habet autem prior de Tactionibus Liber Problemata ſeptem, poſterior quatuor. Lemmata autem ſunt ad utrumque Librum tria et viginti, Theoremata vero (i. e. Figurae vel Delineationes: ipſe enim Pappus ad finem Deſcriptionis Poriſmatum, Locorum Planorum, Inclinationum, et Conicorum Theoremata explicat per Diagrammata) ſexaginta.

Πάππȣ τȣ̃ Ἀλεξανδρέως εἰς τὰ περὶ ἐπαφῶν βιβλία λήμματα *).

Ἐπαφῶν πρῶτον.

Εἰς τὸ α πρόβλημα.

Fig. 1.

α) Δύο παράλληλοι αἱ αβ, γδ, καὶ κύκλος ἐφαπτέσθω ὁ εζ κατὰ τὰ ε, ζ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εζ. ὅτι διάμετρός

b 2

*) In edendis his Lemmatibus, quae nunc primum, e duobus Codicibus Bibliothecae olim Regiae Pariſienſis, Codice nempe 2368 et 2440 deſcripta, collato etiam alio Codice, qui Argentorati in Bibliotheca Academica ſervatur, Graeco ſer-

μέτρος ἐςι τῦ εζ κύκλυ. Ἐιλήφθω σημεῖα ἐπὶ τῆς τῦ κύκλυ περιφερείας τὰ η, θ, καὶ ἐπεζέυχθωσαν αἱ εη, ηζ, εθ, θζ. Ἐπεὶ ῦν ἐφάπτεται μὲν ἡ αε, τέμνει δὲ ἡ εζ, ἴση ἄρα ἐςὶν ἡ ὑπὸ αεζ γωνία τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι [a]) γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εθζ. διὰ ταῦτα καὶ ἡ ὑπὸ δζε ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ εηζ ἐναλλάξ. Καὶ ἡ ὑπὸ εθζ ἄρα γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ εηζ γωνίᾳ. Καὶ εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. Ὀρθὴ ἄρα ἐςὶν ἑκατέρα αὐτῶν. ὥςε ἡμικύκλιά ἐςιν ἑκάτερον εθζ. εηζ. Διάμετρος ἄρα ἐςὶν ἡ εζ τῦ εζ κύκλυ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Fig. 2.

β) Ἔςω κύκλος ὁ αβγ [3]) καὶ ἐφαπτέσθωσαν αὐτῦ αἱ βδ. δα [4]), καὶ τετμήσθω ἡ δ γωνία δίχα τῇ γδ ἐυθείᾳ ὅτι ἐπὶ τῆς γδ τὸ κέντρον ἐςὶ τῦ αβγ. Ἐπεζέυχθωσαν [5]) αἱ γκ [6]), αε, γβ [7]). βε. Ἐπεὶ ῦν ἐφάπτεται μὲν ἡ αδ [8]), τέμνει δὲ ἡ γδ, τὸ ὑπὸ γδε [9]) ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ δα. [10]) ἴση ἄρα ἐςὶ καὶ ἡ ὑπὸ δαε [11]) γωνία τῇ ὑπὸ αγδ γωνίᾳ

sermone prodeunt, ita versatus sum, ut, si unus saltim Codex lectionem commodam haberet, eam amplecterer, neglecta prorsus inepta reliquorum lectione, si vero nullus omnino lectionem haberet, quae intelligi posset, meo sensu plerumque lectionem restituerem, indicata tamen in margine Msptorum lectione, si dubius essem, dubia pariter in margine notarem. Neque vereor, ne periti harum rerum judices me temeritatis in hac caussa accusent. Norunt enim isti, in hoc librorum genere, si rei natura, si veritas Mathematica, si demonstrationis nexus lectionem aliquam postulet, nihil contra valere, vel omnium librorum Msptorum, nedum paucorum, qui corruptissimi saepe ad nos pervenerunt, auctoritatem. [a]) MSS. habent ἐν τῷ ε ἐναλλὰξ τμήματι. [3]) Ita Cod. 2440 et Argent. Codex vero 2368. habet αβγδ. Generatim totum hoc Lemma corruptissimum est in Msptis. [4]) βγ, γα. [5]) Καὶ ἐπεζ. [6]) δα. [7]) δβ. [8]) αγ. [9]) δγε. [10]) γκ. [11]) δαγ.

γωνίᾳ. διὰ ταῦτα καὶ ἡ ὑπὸ δβε [22]) γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ βγδ. Ἀλλὰ τῇ ὑπὸ αγδ ἴση ἐςὶν ἡ ὑπὸ βγδ γωνία. Καὶ ἡ ὑπὸ δαε [23]) ἄρα γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ δβε γωνίᾳ. (Ἡ δὲ ὑπὸ δαγ γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ δβγ γωνίᾳ. ἡ ὑπὸ εαγ ἄρα γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ γβε γωνίᾳ. Καὶ εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.) [24]) ὥςε ὀρθή ἐςιν ἑκατέρα αὐτῶν. Διάμετρος ἄρα ἐςὶν ἡ γε [25]) τȣ̃ αβγ κύκλȣ. Ἐπὶ τῆς γδ ἄρα τὸ κέντρον ἐςὶ τȣ̃ αβγ [26]) κύκλȣ.

Εἰς τὸ ιβ.

Fig. 5.

γ) Ἔςωσαν δύο κύκλοι ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων οἱ αβ, βγ κατὰ τὸ β σημεῖον, καὶ διήχθω ἡ αβγ, ἔςω δὲ ἐπ᾽ αὐτῆς τὸ τȣ̃ αβ κύκλȣ κέντρον· ὅτι καὶ τȣ̃ βγ κύκλȣ κέντρον ἐςὶν ἐπὶ τῆς αβγ. Ἤχθω γὰρ ἀμφοτέρων τῶν κύκλων ἐφαπτομένη ἡ δβε. Ὀρθὴ ἄρα ἐςὶν ἡ ὑπὸ αβδ γωνία· καὶ ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ δβγ ἐςὶν ὀρθὴ, καὶ ἐφάπτεται ἡ δε τȣ̃ βγ κύκλȣ. Τὸ ἄρα κέντρον τȣ̃ βγ κύκλȣ ἐςὶν ἐπὶ τῆς γβ, ὁμοίως καὶ τȣ̃ αβ.

Ἄλλως. [27])

Fig. 5.

δ) Ἔςωσαν πάλιν αἱ αβ, βγ κύκλων διάμετροι· ὅτι οἱ αβ, βγ κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων. Ἤχθω πάλιν ἐφαπτομένη ἡ τȣ̃ αβ κύκλȣ ἡ δε. ὀρθή ἐςιν ἡ ὑπὸ αβδ γωνία, καὶ ἐφεξῆς ἡ ὑπὸ δβγ γωνία ὀρθή ἐςι. Καὶ ἐςὶν ἑκάτερον κέντρον τῶν αβ, βγ κύκλων ἐπὶ τῆς αβγ [28]) ἡ δε ἄρα ἐφάπτεται τȣ̃ βγ κύκλȣ. ἀλλὰ καὶ τȣ̃ αβ κατ᾽ αὐτὸ

 τὸ

[22]) δαε. [23]) δαγ. [24]) Omnia, quae uncis inclusa sunt, desunt in Msptis. [25]) δε. [26]) αβδ. [27]) Rectius scriberetur ἀνάπαλιν vel ἀλλὰ δὴ πάλιν. [28]) 2368 habet: ἐςὶν ἐν ἑκατέρᾳ κέντρον τῶν αβγ; 2440: — κέντρον ἡ βγ: Argent. ἐςὶν ἑκατέρᾳ κέντρων ἡ εγ.

τὸ β. Καὶ ὁ αβ ἄρα τῦ βγ κύκλυ ἐφάπτεται κατὰ τὸ β σημεῖον. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς.

Fig. 4.

ε) Δύο κύκλοι ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων οἱ αβ, βγ κατὰ τὸ β σημεῖον, καὶ διήχθω ἡ αγβ, ἔςω δὲ ἐπ' αὐτῆς τὸ κέντρον τῦ αβ κύκλυ· ὅτι καὶ τῦ βγ τὸ κέντρον ἐςὶν ἐπὶ τῆς βγ. Ἤχθω ἐφαπτομένη τῶν κύκλων ἡ δε. Ἐπεὶ ἔν ἐφαπτομένη ἡ δε τῦ αβ κύκλυ, καὶ διὰ τῦ κέντρυ ἡ αβ, ὀρθὴ ἐςιν ἡ ὑπὸ δβγ γωνία. Καὶ ἦκται ἀπὸ τῆς ἁφῆς τῆς β ἡ βγ [19]). Τὸ κέντρον ἄρα ἐςὶ τῦ βγ κύκλυ ἐπὶ τῆς βγ [20]). Φανερὸν δὲ καὶ ὅτως. Ἐι γὰρ διαχθῇ ἡ βζ, καὶ ἐπεζέυχθωσαν αἱ γζ, αη, γένοιτο ἂν ἴση ἡ ὑπὸ εβγ γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ τῶν βζγ, αηβ γωνίᾳ. Καὶ ἐςὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ αηβ γωνία. ὀρθὴ ἄρα ἐςὶ καὶ ἡ ὑπὸ βζγ γωνία, ὥςε ἐπὶ τῆς βγ τὸ κέντρον ἐςὶ τῦ βγ. Καὶ ὁμοίως κἂν τῦ βγ δοθῇ ἐπὶ τῆς αβ, δείξομεν, ὅτι καὶ τῦ αβ.

Fig. 4.

ς) Ἀλλὰ δὴ πάλιν. Ἔςωσαν διάμετροι αἱ αβ, βγ. ὅτι οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων. Ἤχθω τῦ αβ κύκλυ ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ δβε· ὀρθὴ ἄρα ἐςὶν ἡ ὑπὸ αβε γωνία. Καὶ ἐςὶ διάμετρος ἡ βγ. ἡ δε ἄρα ἐφαπτομένη τῦ βγ κύκλυ κατὰ τὸ β σημεῖον [21]). ἀλλὰ γὰρ καὶ τῦ αβ κύκλυ ἐφάπτεται κατὰ τὸ β. Καὶ ὁ αβ ἄρα κύκλος τῦ βγ κύκλυ ἐφάπτεται κατὰ τὸ β. Φανερὸν δὲ καὶ ὅτως [22]). Ἐι γὰρ ἐκβληθείη ἡ γζ ἐπὶ τὸ δ, γένοιτο ἂν τὸ ὑπὸ γδζ ἴσον τῷ ἀπὸ δβ [23]), διὰ τὸ ὀρθὴν γίνεσθαι τὴν πρὸς τῷ ζ γω-

19) ἐπὶ τὴν βγ. 20) Verba ἐπὶ τῆς βγ desunt in Mſptis. 21) Duae diverſae hujus Lemmatis Demonſtrationes in Mſptis confuſae prorſus leguntur. Ita poſt σημεῖον ſtatim habent verba: εἰ γὰρ ἐκβλ. — πρὸς τῷ β ὀρθῆς. Reſtituere omnia ad modum Lemmatis 5ti tentavi. 22) φανερὸν — ὅτως deſunt 23) αβ.

ζ γωνίαν, ἴσης τῆς πρὸς τῷ β ὀρθῆς: ἡ δε [24]) ἄρα ἐφάπτεται τῷ βγ κύκλῳ. ἀλλὰ καὶ τῷ αβ κατ' αὐτὸ τὸ β. Ὁ αβ ἄρα κύκλος τῷ βγ κύκλῳ ἐφάπτεται κατὰ τὸ β σημεῖον. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς.

Ἐις τὸ ις.

Fig. 5.

ζ) Ἔςωσαν δύο κύκλοι ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων οἱ αβγ, δεβ κατὰ τὸ β σημεῖον, καὶ διὰ τῷ β διήχθωσαν αἱ γβδ, αβε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, δε· ὅτι παράλληλοι αἱ αγ, δε. Ἤχθω γὰρ τῶν κύκλων ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ ζη κατὰ τὸ β σημεῖον. Ἐπεὶ ἂν ἐφάπτεται μὲν ἡ βζ, τέμνει δὲ ἡ βα, ἴση ἐςὶν ἡ ὑπὸ αβζ γωνία τῇ ὑπὸ αγβ. διὰ ταῦτα δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ηβε γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ εδβ γωνίᾳ. Καὶ ἡ ὑπὸ αγβ ἄρα γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ εδβ γωνίᾳ. Καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ. Παράλληλος ἄρα ἐςιν ἡ αγ τῇ δε. ὅπερ ἔδει —

Fig. 6.

η) Κύκλος ὁ αβγ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ [25]) αβ, βγ, γα, καὶ ἀπὸ τῷ α διήχθω τις εὐθεῖα ἡ αε, ὥςε ἴσην ἔιναι τὴν αβγ γωνίαν τῇ ὑπὸ εαγ γωνίᾳ· ὅτι ἐφάπτεται ἡ δε τῷ αβ κύκλῳ κατὰ τὸ α σημεῖον. Ἐι μὲν ἂν ἡ αγ διὰ τῷ κέντρῳ ἐςὶ, Φανερὸν ἔςαι. Γίνεται γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ εαγ γωνία, διὰ τὸ καὶ τὴν β γωνίαν ἔιναι ὀρθήν. Τῦτο δε προδέδεικται. Ἐι δὲ μὴ, ἔςω τὸ κέντρον τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αζ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βη. Ὀρθὴ ἄρα ἐςὶν ἡ ὑπὸ αβη γωνία. Ἐπεὶ ἂν ἴση ἐςὶν ἡ μὲν ὑπὸ εαγ γωνία τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ δὲ ὑπὸ ηαγ γωνία ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῇ ὑπὸ ηβγ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ εαη γωνία τῇ ὑπὸ αβη γωνίᾳ ἴση ἐςίν. Ὀρθὴ δε ἡ ὑπὸ αβη. Ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπο εαη.

[24]) ἡ δε ἄρα — κατὰ τὸ β σημεῖον desunt [25]) ἐπεζεύχθω ἡ.

καὶ ἐςὶν ἐκ τῦ κέντρε ἡ αζ. Ἐφαπτομένη ἄρα ἡ δε τῦ αβγ κύκλε. Τῦτο γὰρ προγέγραπται.

Fig. 5.

ϑ) Τέτε ὄντος ἀντίςροφον τῦ πρὸ αὐτῦ. Παραλλήλε ἔσης τῆς αγ τῆ δε, δεῖξαι, ὅτι ἐφαπτόμενοι οἱ αβγ, δεβ ἀλλήλων κατὰ τὸ β σημεῖον. Ἤχθω πάλιν τῦ αβγ κύκλε ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ ζη. ἴση ἄρα ἐςὶν ἡ ὑπὸ αβζ γωνία τῆ γ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ αβζ γωνία ἴση ἐςι τῆ ὑπὸ εβη. ἡ δὲ γ τῆ δ ἐναλλὰξ ἴση ἐςί Καὶ ἡ ὑπὸ ηβε γωνία τῆ δ. Διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον ἐφάπτεται ἡ ζη τῦ δβε κύκλε, ἀλλὰ καὶ τῦ αβγ κατὰ τὸ β Καὶ ὁ αβγ ἄρα κύκλος τῦ βδε κύκλε ἐφάπτεται κατὰ τὸ β σημεῖον.

Πρόβλημα εἰς τὸ αὐτό.

Fig. 7.

ι) Θέσει δοθέντος κύκλε, καὶ δύο δοθέντων τῶν δ, ε, ἀπὸ τῶν δ, ε ἂν κλασθῆ [26]) ἡ δβε, καὶ ἐκβληθῆ, ποιεῖν παράλληλον τὴν αγ τῆ δε. Γεγονέτω, καὶ ἦχθω ἐφαπτομένη ἡ ζα [27]) Ἐπεὶ ἐν παράλληλος ἡ αγ τῆ δε, ἴση ἐςὶν ἡ γ γωνία τῆ ὑπὸ γδε γωνίᾳ. ἀλλὰ ἡ γ ἴση ἐςὶ τῆ ὑπὸ ζαε, ἐφάπτεται γὰρ καὶ τέμνει. Καὶ ἡ ὑπὸ ζαε ἄρα γωνία ἴση ἐςὶ τῆ ὑπὸ γδε. Ἐν κύκλῳ ἄρα ἐςὶ τὰ α, β, δ, ζ σημεῖα· ἴσον ἄρα ἐςὶ τὸ ὑπὸ αεβ τῷ ὑπὸ ζεδ. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ αεβ, ἴσον γάρ ἐςι τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν δεζ. Καὶ δοθεῖσα ἡ δε· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ εζ [28]). ἀλλὰ καὶ τῆ θέσει, καὶ ἐςὶ δοθὲν τὸ ε· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ζ. Ἀπὸ δεδομένε σημείε τῦ ζ θέσει δεδομένε τῦ κύκλε τῦ αβγ ἐφαπτομένη [29]) εὐθεῖα ἦκται ἡ ζα. δέδοται ἄρα καὶ ἡ ζα τῆ θέσει καὶ τῷ μεγέθει. Καὶ ἐςὶ δοθὲν τὸ ζ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ α. ἀλλὰ καὶ τὸ ε δοθέν.

[26]) δοθῆ. [27]) ζη. [28]) βζ. [29]) ἐφάπτεται πρὸς εὐθεῖαν ἦκται ἡ ζαν.

θέν. Θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ αε. Θέσει δὲ καὶ ὁ κύκλος. δοθὲν ἄρα τὸ β σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ ἑκάτερον τῶν δ, ε δοθέν. δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν δβ, βε τῇ θέσει. Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. Ἔστω ὁ μὲν κύκλος ὁ αβγ, τὰ δὲ δοθέντα δύο σημεῖα δ, ε. Κείσθω τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ ε ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς δε, καὶ ἄλλης τινὸς τῆς εζ, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ τοῦ αβγ κύκλου ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ζα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αε καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ δβ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αγ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αγ τῇ δε. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ζεδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης, ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ αεβ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ αεβ τῷ ὑπὸ ζεδ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ζαε γωνία τῇ ὑπὸ βδε γωνίᾳ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ζαε γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι τῇ ὑπὸ αγβ. Καὶ ἡ ὑπὸ αγβ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βδε γωνίᾳ. Καί εἰσιν ἐναλλάξ. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αγ τῇ δζ.

Εἰς τὸ ιζ [30]).

Fig. 16.

ια) Ἔστωσαν δύο κύκλοι οἱ αβγ, αεδ, ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων κατὰ τὸ α σημεῖον, καὶ διήχθωσαν ἀπὸ τοῦ α εὐθεῖαι αἱ αδβ, αεγ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δε, βγ· ὅτι παράλληλοί εἰσιν αἱ δε, βγ. Ἤχθω ἀπὸ τοῦ α ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ ζη· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ἀπὸ ζαβ γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ αγβ, αεδ· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ αγβ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αεδ. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ δε τῇ βγ. Ἀλλὰ παράλληλος ἔστω ἡ δε τῇ βγ [31]). ὅτι ἐφάπτονται οἱ αβγ, αδε κύκλοι ἀλλήλων. Ἤχθω γὰρ τοῦ αβγ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ

30) Mss. habent ιδ. At, quum septimum jam Lemma ab 16tam Propositionem, decimum tertium vero ad 18vam pertineat, nostrum hoc Lemma non nisi ad 17mam pertinere potest.

31) ἀλλὰ — τῇ βγ. Commandino monente addidi.

ἡ ζη· ἴση ἄρα ἐςὶν ἡ ὑπὸ ζαδ γωνία τῇ γ γωνίᾳ. ἀλλὰ ἡ γ γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ε. Καὶ ἡ ὑπὸ ζαδ ἄρα γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ε γωνίᾳ. ὥςε ἐφαπτομένη ἡ ζη τȣ̃ αδε κύκλȣ. Τȣ̃το γὰρ προδέδεικται.

Πρόβλημα ἐις τὸ ἀυτό.

Fig. 17.

ιβ) Θέσει δοθέντος [32]) κύκλȣ τȣ̃ αβγ, καὶ δύο δοθέντων τῶν δ, ε, κλᾶν [33]) τὴν δαε. καὶ ποιεῖν παράλληλον τὴν βγ τῇ δε. Γεγονέτω. καὶ ἀπὸ τȣ̃ β ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ βζ. Ἐπεὶ ȣ̃ν ἐφάπτεται ἡ βζ, τέμνει δὲ ἡ βγ, ἴση ἐςὶν ἡ [34]) ὑπὸ ζβγ γωνία, τȣτέςιν ἡ ὑπὸ δζβ γωνία τῇ α. Ἐν κύκλῳ ἄρα ἐςὶ τὰ α, β, ε, ζ σημεῖα. ἴσον ἄρα ἐςὶ τὸ ὑπὸ αδβ τῷ ὑπὸ εδζ. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ αδβ [35]), ἴσον γὰρ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τȣ̃ δ. [36]) δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ εδζ. Καὶ ἐςὶ δοθεῖσα ἡ εδ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ δζ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἐςὶ δοθὲν τὸ δ. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ζ. ἀπὸ δὴ δοθέντος σημείȣ τȣ̃ ζ, τῇ θέσει δὲ δοθέντος κύκλȣ ἐφαπτομένη ἦκται ἡ ζβ. δέδοται ἄρα ἡ ζβ τῇ θέσει. ἀλλὰ καὶ ὁ αβγ κύκλος θέσει. δοθὲν ἄρα ἐςὶ τὸ β σημεῖον. ἔςι δε καὶ τὸ δ δοθέν. θέσει ἄρα ἐςὶν ἡ βδ [37]). θέσει δὲ καὶ ὁ κύκλος. δοθὲν ἄρα ἐςὶ τὸ α. ἔςι δὲ καὶ τὸ ε δοθέν δοδεῖσα [38]) ἄρα ἐςὶν ἑκατέρα τῶν δα, αε τῇ θέσει. Συντεθήσεται δὲ τὸ πρόβλημα ȣ̃τως. Ἔςω ὁ μὲν κύκλος ὁ αβγ, τὰ δὲ δοθέντα σημεῖα τὰ δ, ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ εδζ, καὶ ἀπὸ τȣ̃ ζ τȣ̃ αβγ κύκλȣ ἐφαπτομένη [39]) ἐυθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ζβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ, ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ α, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, βγ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐςιν ἡ βγ τῇ δε. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ εδζ ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφα-

[32]) ὄντος. [33]) κλᾶν δοθεῖσαν. [34]) τῇ ὑπὸ ζβγ. [35]) τὸ ὑπὸ λαμβ. [36]) τῷ ἀπὸ τῆς βζ δοθέντι. [37]) ἡ αδ. [38]) δοθεῖσα. [39]) ἐφαπτομένη deest.

ἐφαπτομένης, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ α γωνία, τουτέστιν ἡ ὑπὸ γβζ (ἐφάπτεται γὰρ ἡ βζ, τέμνει δὲ ἡ βγ) τῇ [40]) ὑπὸ βζδ. Καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ. Παράλληλος [41]) ἄρα ἐστὶν ἡ βγ τῇ δε.

Πρόβλημα εἰς τὸ ιη.

Fig. 18.

ιγ) Θέσει δοθέντος κύκλου τοῦ αβγ, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν δ, ε, ἀπὸ τῶν δ, ε κλᾶν [42]) τὴν δαε [43]), καὶ ποιεῖν τὴν δε παράλληλον τῇ βγ. Γεγονέτω, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ β τοῦ αβγ κύκλου ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἡ βζ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ζβδ γωνία τῇ γ, τουτέστι τῇ ε. ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶ τὰ β, ζ, α, ε σημεῖα. Τὸ ἄρα ὑπὸ βδα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ζδε. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ βδα, ἀπὸ γὰρ δοθέντος τοῦ δ [44]) εἰς θέσει δεδομένον τὸν κύκλον [45]) διῆκται ἡ αδβ. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ζδε. Καὶ ἐστὶ δοθεῖσα ἡ δε. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ζδ. Καὶ ἐστὶ δοθὲν τὸ δ. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ζ. ἀπὸ δὴ δοθέντος σημείου τοῦ ζ θέσει δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένη ἦκται ἡ ζβ. [46]) θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ζβ. θέσει δὲ καὶ ὁ κύκλος. δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ β σημεῖον. ἀλλὰ καὶ τὸ δ δοθέν. θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ βδ [47]). θέσει δὲ καὶ ὁ κύκλος. δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ α σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ ἑκάτερον τῶν δ, ε δοθέν. δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν [48]) ἑκατέρα τῶν δα, αε τῇ θέσει. Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. Ἔστω ὁ μὲν τῇ θέσει δεδομένος κύκλος ὁ αβγ, τὰ δὲ δοθέντα δύο σημεῖα τὰ δ, ε, καὶ διήχθω τυχοῦσα ἡ αδβ, καὶ τῷ ὑπὸ αδβ ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ εδζ, τουτέστι τοῦ αβγ κύκλου ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ βζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γεα. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ζβδ γωνία τῇ ὑπὸ δεα (ἐν κύκλῳ γὰρ

[40]) τὴν ὑπὸ βζδ. [41]) παράλληλος deest. [42]) κλᾶν δοθῇ. [43]) αλε. [44]) α. [45]) δεδομένην γωνίαν. [46]) MSS. habent: καὶ ἐστὶ δοθὲν τὸ δ. κύκλου ἄρα ἐφαπτομένη etc. [47]) βα. [48]) ἑκατέρα τῶν δ, ε δοθέντων. δοθὲν ἄρα ἐστὶν etc.

γὰρ ἐςὶ τὰ α, β, ε, ζ σημεῖα) ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ζβδ ἴση ἐςὶ τῇ γ (ἐφάπτεται γὰρ καὶ τέμνει) καὶ ἡ γ ἄρα γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ε. Παράλληλος ἄρα ἐςὶν ἡ βγ τῇ δε. ὅπερ ἔδει —

Πρόβλημα εἰς τὸ ιθ.

Fig. 20.

ιδ) Θέσει δοθέντος [49]) τοῦ αβγ κύκλου, καὶ [50]) δύο δοθέντων τῶν δ, ε, κλᾶν ἀπὸ τῶν δοθέντων [51]) τὴν δαε, ὥςε παράλληλον εἶναι τὴν βγ τῇ δε. Γεγονέτω, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ βζ· γίνεται ἓν πάλιν ἐν κύκλῳ τὰ α, ζ, β, ε σημεῖα· καὶ ἴσον τὸ ὑπὸ αδβ τῷ ὑπὸ εδζ. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ αδβ. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ εδζ. Καὶ ἐςὶ δοθεῖσα ἡ δε. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ δζ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει. Καὶ ἐςὶ δοθὲν τὸ δ. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ζ. ὥςε θέσει ἡ βζ. ἀλλὰ καὶ ὁ κύκλος. δοθὲν ἄρα ἐςὶ τὸ β. ἀλλὰ καὶ τὰ δ, ε. δοθεῖσα ἄρα ἐςὶν ἑκατέρα τῶν δα, αε. ὁμοίως γὰρ τοῖς πρότερον δείξομεν, καὶ ὁμοίως ἡ σύνθεσις τοῦ πρὸ αὐτοῦ.

Εἰς τὸ κδ.

Fig. 21.

ιε) Ἀπτέσθωσαν δύο κύκλοι ἀλλήλων οἱ αβ, βγ κατὰ τὸ β σημεῖον· καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα αὐτῶν τὰ δ, ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, δβ, γε, εβ, ἔςω δὲ παράλληλας ἡ αδ τῇ γε· ὅτι εὐθεῖαί εἰσιν αἱ διὰ τῶν δβε, αβγ. Ἤχθω γὰρ τῶν αβ, βγ κύκλων ἐφαπτομένη ἡ ζη. Ἐπεὶ δὲ τοῦ κέντρου ἐςὶν ἡ δβ. ὀρθὴ ἄρα ἐςὶν ἡ ὑπὸ τῶν δβζ γωνία. διὰ ταῦτα καὶ ἡ ὑπὸ ζβε γωνία ἐςὶν ὀρθή. εὐθεῖα ἄρα ἐςὶν ἡ διὰ τῶν δβε. Ἐπεὶ δὲ ἴση ἐςὶν ἡ μὲν αδ τῇ δβ, ἡ δὲ εγ τῇ εβ, ἔςιν ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν δβ, οὕτως ἡ εγ πρὸς τὴν εβ. Καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς δ, ε αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ἴση ἄρα ἐςὶν ἡ ὑπὸ δβα γωνία τῇ ὑπὸ γβε. καὶ ἐςὶν εὐθεῖα ἡ δβε. εὐθεῖα ἄρα ἐςὶ καὶ ἡ διὰ τῶν α, β, γ. ὅπερ —

Εἰς

[49]) ὄντες. [50]) καὶ deest. [51]) κλᾶν δοθέντων.

'Εις τὸ κε.

Fig. 22.

ις) Ἴσης ἴσης τῆς μὲν αβ τῇ βγ, τῆς δὲ αδ τῇ δε, καὶ παραλλήλυ ἴσης τῆς δε τῇ βγ. δεῖξαι, ὅτι εὐθεῖά ἐςιν ἡ διὰ τῶν α, ε, γ σημείων. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, εγ, καὶ τῇ αε παράλληλος ἤχθω ἡ βζ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ εδ ἐπὶ τὸ ζ. ἴση ἄρα ἐςὶν ἡ δζ τῇ δβ. ἔςι δὲ καὶ ἡ αδ τῇ δε ἴση. ὅλη ἄρα ἡ αβ ὅλη τῇ ζε ἐςὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ ἡ αβ τῇ βγ ισῃ ἐςί. καὶ ἡ βγ ἄρα τῇ ζε ἐςὶν ἴση. ἀλλὰ παράλληλός ἐςιν. καὶ ἡ βγ ἄρα τῇ ζε ἐςὶν ἴση. ἀλλὰ παράλληλός ἐςιν. εὐθεῖα ἄρα ἐςὶν ἡ αεγ. τῦτο γὰρ φανερόν.

'Εις τὸ λα.

Fig. 23.

ιζ) Ἐὰν ᾖ κύκλος ὁ αβγ, καὶ δύο προβληθῶσιν αἱ βδ, δγ ἴσαι ἴσαι, ἡ δὲ βδ ἐφάπτεται· ὅτι καὶ ἡ δγ ἐφάπτεται. Τῦτο δὲ φανερόν, ἂν γὰρ διαχθῇ ἡ δα, τὸ ὑπὸ αδε ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ δβ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ δβ τῷ ἀπὸ δγ ἴσον ἐςί. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αδε ἄρα ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ δγ. ἐφάπτεται ἄρα ἡ δγ τῦ αβγ κύκλυ.

Fig. 21.

ιη) Δύο κύκλοι οἱ αβ, βγ, καὶ διὰ τῦ β διήχθω τὶς ἡ αβγ, καὶ δύο παράλληλοι αἱ αδ, εγ νεύυσαι ἐπὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων· ὅτι οἱ αβ, βγ κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ β σημεῖον. Ἐιλήφθω τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ δ, ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δβ, βε. εὐθεῖα ἄρα ἐςὶν ἡ διὰ τῶν δβε. Παράλληλος γὰρ [52]) ἐςὶν ἡ αδ τῇ γε, καὶ ἐςὶν ὡς ἡ αδ πρὸς δβ [53]), ὕτως ἡ γε πρὸς εβ. καὶ γίνεται δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα τὴν α τῇ γ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς δ, ε τὰς πλευρὰς ἀνάλογον. ἰσογώνια ἄρα ἐςὶ τὰ τρίγωνα. ἴση ἄρα ἐςὶν ἡ ὑπὸ αβδ γωνία τῇ ὑπὸ γβε, καὶ ἐςὶν εὐθεῖα ἡ αβγ. εὐθεῖα ἄρα ἐςὶ καὶ ἡ δβε.

52) ἄρα. 53) αβ.

μέτρος ἐστι τοῦ εζ κύκλου. Εἰλήφθω σημεῖα ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τὰ η, θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εη, ηζ, εθ, θζ. Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται μὲν ἡ αε, τέμνει δὲ ἡ εζ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αεζ γωνία τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι [a]) γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εθζ. διὰ ταῦτα καὶ ἡ ὑπὸ δζε ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εηζ ἐναλλάξ. Καὶ ἡ ὑπὸ εθζ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εηζ γωνίᾳ. Καὶ εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. Ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα αὐτῶν. ὥστε ἡμικύκλιά ἐστιν ἑκάτερον εθζ, εηζ. Διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ εζ τοῦ εζ κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Fig. 2.

β) Ἔστω κύκλος ὁ αβγ [3]) καὶ ἐφαπτέσθωσαν αὐτοῦ αἱ βδ, δα [4]), καὶ τετμήσθω ἡ δ γωνία δίχα τῇ γδ εὐθείᾳ ὅτι ἐπὶ τῆς γδ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγ. Ἐπεζεύχθωσαν [5]) αἱ γα [6]), αε, γβ [7]), βε. Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται μὲν ἡ αδ [8]), τέμνει δὲ ἡ γδ, τὸ ὑπὸ γδε [9]) ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δα. [10]) ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ δαε [11]) γωνία τῇ ὑπὸ αγδ γωνίᾳ

sermone prodeunt, ita versatus sum, ut, si unus saltim Codex lectionem commodam haberet, eam amplecterer, neglecta prorsus inepta reliquorum lectione, si vero nullus omnino lectionem haberet, quae intelligi posset, meo sensu plerumque lectionem restituerem, indicata tamen in margine Msptorum lectione, si dubius essem, dubia pariter in margine notarem. Neque vereor, ne periti harum rerum judices me temeritatis in hac caussa accusent. Norunt enim isti, in hoc librorum genere, si rei natura, si veritas Mathematica, si demonstrationis nexus lectionem aliquam postulet, nihil contra valere, vel omnium librorum Msptorum, nedum paucorum, qui corruptissimi saepe ad nos pervenerunt, auctoritatem. [a]) Mss. habent ἐν τῷ ε ἐναλλὰξ τμήματι. [3]) Ita Cod. 2440 et Argent. Codex vero 2368. habet αβγδ. Generatim totum hoc Lemma corruptissimum est in Msptis. [4]) βγ, γα. [5]) Καὶ ἐπεζ. [6]) δα. [7]) δβ. [8]) αγ. [9]) δγε. [10]) γα. [11]) δαγ.

γωνίᾳ. διὰ ταῦτα καὶ ἡ ὑπὸ δβε [22]) γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ βγδ. Ἀλλὰ τῇ ὑπὸ αγδ ἴση ἐςὶν ἡ ὑπὸ βγδ γωνία. Καὶ ἡ ὑπὸ δαε [23]) ἄρα γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ δβε γωνίᾳ. (Ἡ δὲ ὑπὸ δαγ γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ δβγ γωνίᾳ. ἡ ὑπὸ εαγ ἄρα γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ γβε γωνίᾳ. Καὶ εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.) [24]) ὥςε ὀρθή ἐςιν ἑκατέρα αὐτῶν. Διάμετρος ἄρα ἐςὶν ἡ γε [25]) τῦ αβγ κύκλυ. Ἐπὶ τῆς γδ ἄρα τὸ κέντρον ἐςὶ τῦ αβγ [26]) κύκλυ.

Ἐις τὸ ιβ.

Fig. 5.

γ) Ἔςωσαν δύο κύκλοι ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων οἱ αβ, βγ κατὰ τὸ β σημεῖον, καὶ διήχθω ἡ αβγ, ἔςω δὲ ἐπ' αὐτῆς τὸ τῦ αβ κύκλυ κέντρον· ὅτι καὶ τῦ βγ κύκλυ κέντρον ἐςὶν ἐπὶ τῆς αβγ. Ἤχθω γὰρ ἀμφοτέρων τῶν κύκλων ἐφαπτομένη ἡ δβε. Ὀρθὴ ἄρα ἐςὶν ἡ ὑπὸ αβδ γωνία· καὶ ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ δβγ ἐςὶν ὀρθὴ, καὶ ἐφάπτεται ἡ δε τῦ βγ κύκλυ. Τὸ ἄρα κέντρον τῦ βγ κύκλυ ἐςὶν ἐπὶ τῆς γβ, ὁμοίως καὶ τῦ αβ.

Ἄλλως. [27])

Fig. 5.

δ) Ἔςωσαν πάλιν αἱ αβ, βγ κύκλων διάμετροι· ὅτι οἱ αβ, βγ κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων. Ἤχθω πάλιν ἐφαπτομένη ἡ τῦ αβ κύκλυ ἡ δε. ὀρθή ἐςιν ἡ ὑπὸ αβδ γωνία, καὶ ἐφεξῆς ἡ ὑπὸ δβγ γωνία ὀρθή ἐςι. Καὶ ἐςὶν ἑκάτερον κέντρον τῶν αβ, βγ κύκλων ἐπὶ τῆς αβγ [28]) ἡ δε ἄρα ἐφάπτεται τῦ βγ κύκλυ. ἀλλὰ καὶ τῦ αβ κατ' αὐτὸ τὸ

[22]) δαε. [23]) δαγ. [24]) Omnia, quae uncis inclusa sunt, desunt in Msptis. [25]) δε. [26]) αβδ. [27]) Rectius scriberetur ἀνάπαλιν vel ἀλλὰ δὴ πάλιν. [28]) 2368 habet: ἐςὶν ἐν ἑκατέρῳ κέντρον τῶν αβγ; 2440: — κέντρον ἡ βγ: Argent. ἐςὶν ἑκατέρας κέντρου ἡ εγ.

τὸ β. Καὶ ὁ αβ ἄρα τῦ βγ κύκλȣ ἐφάπτεται κατὰ τὸ β σημεῖον. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς.

Fig. 4.

ε) Δύο κύκλοι ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων οἱ αβ, βγ κατὰ τὸ β σημεῖον, καὶ διήχθω ἡ αγβ, ἔςω δὲ ἐπ' αὐτῆς τὸ κέντρον τῦ αβ κύκλȣ· ὅτι καὶ τῦ βγ τὸ κέντρον ἐςὶν ἐπὶ τῆς βγ. Ἤχθω ἐφαπτομένη τῶν κύκλων ἡ δε. Ἐπεὶ ȣ͂ν ἐφαπτομένη ἡ δε τῦ αβ κύκλȣ, καὶ διὰ τῦ κέντρȣ ἡ αβ, ὀρθή ἐςιν ἡ ὑπὸ δβγ γωνία. Καὶ ἦκται ἀπὸ τῆς ἀφῆς τῆς β ἡ βγ [19]). Τὸ κέντρον ἄρα ἐςὶ τῦ βγ κύκλȣ ἐπὶ τῆς βγ [20]). Φανερὸν δὲ καὶ ȣ̔́τως. Ἐι γὰρ διαχθῇ ἡ βζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ γζ, αη, γένοιτο ἂν ἴση ἡ ὑπὸ εβγ γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ τῶν βζγ, αηβ γωνίᾳ. Καὶ ἐςὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ αηβ γωνία. ὀρθὴ ἄρα ἐςὶ καὶ ἡ ὑπὸ βζγ γωνία, ὥςε ἐπὶ τῆς βγ τὸ κέντρον ἐςὶ τῦ βγ. Καὶ ὁμοίως κἂν τῦ βγ δοθῇ ἐπὶ τῆς αβ, δείξομεν, ὅτι καὶ τῦ αβ.

Fig. 4.

ς) Ἀλλὰ δὴ πάλιν. Ἔςωσαν διάμετροι αἱ αβ, βγ. ὅτι οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων. Ἤχθω τῦ αβ κύκλȣ ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ δβε· ὀρθὴ ἄρα ἐςὶν ἡ ὑπὸ αβε γωνία. Καὶ ἐςὶ διάμετρος ἡ βγ. ἡ δε ἄρα ἐφαπτομένη τῦ βγ κύκλȣ κατὰ τὸ β σημεῖον [21]). ἀλλὰ γὰρ καὶ τῦ αβ κύκλȣ ἐφάπτεται κατὰ τὸ β. Καὶ ὁ αβ ἄρα κύκλος τῦ βγ κύκλȣ ἐφάπτεται κατὰ τὸ β. Φανερὸν δὲ καὶ ȣ̔́τως [22]). Ἐι γὰρ ἐκβληθείη ἡ γζ ἐπὶ τὸ δ, γένοιτο ἂν τὸ ὑπὸ γδζ ἴσον τῷ ἀπὸ δβ [23]), διὰ τὸ ὀρθὴν γίνεσθαι τὴν πρὸς τῷ ζ γω-

[19]) ἐπὶ τὴν βγ. [20]) Verba ἐπὶ τῆς βγ desunt in Msptis. [21]) Duae diversae hujus Lemmatis Demonstrationes in Msptis confusae prorsus leguntur. Ita post σημεῖον statim habent verba: ει γὰρ ἐκβλ. — πρὸς τῷ β ὀρθῆς. Restituere omnia ad modum Lemmatis 5ti tentavi. [22]) φανερὸν — ȣ̔́τως desunt [23]) αβ.

ζ γωνίαν, ἴσης τῆς πρὸς τῷ β ὀρθῆς. ἡ δε [24]) ἄρα ἐφάπτεται τῷ βγ κύκλῳ. ἀλλὰ καὶ τῷ αβ κατ' αὐτὸ τὸ β. Ὁ αβ ἄρα κύκλος τῷ βγ κύκλῳ ἐφάπτεται κατὰ τὸ β σημεῖον. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς.

Εἰς τὸ ις.

Fig. 5.

ζ) Ἔστωσαν δύο κύκλοι ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων οἱ αβγ, δεβ κατὰ τὸ β σημεῖον, καὶ διὰ τῷ β διήχθωσαν αἱ γβδ, αβε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, δε· ὅτι παράλληλοι αἱ αγ, δε. Ἤχθω γὰρ τῶν κύκλων ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ ζη κατὰ τὸ β σημεῖον. Ἐπεὶ ἓν ἐφάπτεται μὲν ἡ βζ, τέμνει δὲ ἡ βα, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβζ γωνία τῇ ὑπὸ αγβ. διὰ ταῦτα δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ηβε γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εδβ γωνίᾳ. Καὶ ἡ ὑπὸ αγβ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εδβ γωνίᾳ. Καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αγ τῇ δε. ὅπερ ἔδει —

Fig. 6.

η) Κύκλος ὁ αβγ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ [25]) αβ, βγ, γα, καὶ ἀπὸ τῷ α διήχθω τις εὐθεῖα ἡ αε, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν αβγ γωνίαν τῇ ὑπὸ εαγ γωνίᾳ· ὅτι ἐφάπτεται ἡ δε τῷ αβ κύκλῳ κατὰ τὸ α σημεῖον. Εἰ μὲν ἓν ἡ αγ διὰ τῷ κέντρῳ ἐστὶ, φανερὸν ἔσται. Γίνεται γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ εαγ γωνία, διὰ τὸ καὶ τὴν β γωνίαν εἶναι ὀρθήν. Τῷτο δε προδέδεικται. Εἰ δὲ μὴ, ἔστω τὸ κέντρον τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αζ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βη. Ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβη γωνία. Ἐπεὶ ἓν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ εαγ γωνία τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ δὲ ὑπὸ ηαγ γωνία ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῇ ὑπὸ ηβγ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ εαη γωνία τῇ ὑπὸ αβη γωνίᾳ ἴση ἐστίν. Ὀρθὴ δε ἡ ὑπὸ αβη. Ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ εαη. καὶ

[24]) ἡ δε ἄρα — κατὰ τὸ β σημεῖον desunt [25]) ἐπεζεύχθω ἡ.

τὸ β. Καὶ ὁ αβ ἄρα τῷ βγ κύκλῳ ἐφάπτεται κατὰ τὸ β σημεῖον. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς.

Fig. 4.

ε) Δύο κύκλοι ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων οἱ αβ, βγ κατὰ τὸ β σημεῖον, καὶ διήχθω ἡ αγβ, ἔςω δὲ ἐπ' αὐτῆς τὸ κέντρον τῷ αβ κύκλῳ· ὅτι καὶ τῷ βγ τὸ κέντρον ἐςὶν ἐπὶ τῆς βγ. Ἤχθω ἐφαπτομένη τῶν κύκλων ἡ δε. Ἐπεὶ ἐν ἐφαπτομένη ἡ δε τῷ αβ κύκλῳ, καὶ διὰ τῷ κέντρῳ ἡ αβ, ὀρθή ἐςιν ἡ ὑπὸ δβγ γωνία. Καὶ ἦκται ἀπὸ τῆς ἀφῆς τῆς β ἡ βγ [19]). Τὸ κέντρον ἄρα ἐςὶ τῷ βγ κύκλῳ ἐπὶ τῆς βγ [20]). Φανερὸν δὲ καὶ ἄτως. Ἐι γὰρ διαχθῇ ἡ βζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ γζ, αη, γένοιτο ἂν ἴση ἡ ὑπὸ εβγ γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ τῶν βζγ, αηβ γωνίᾳ. Καὶ ἐςὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ αηβ γωνία. ὀρθὴ ἄρα ἐςὶ καὶ ἡ ὑπὸ βζγ γωνία, ὥςε ἐπὶ τῆς βγ τὸ κέντρον ἐςὶ τῷ βγ. Καὶ ὁμοίως κἂν τῷ βγ δοθῇ ἐπὶ τῆς αβ, δείξομεν, ὅτι καὶ τῷ αβ.

Fig. 4.

ϛ) Ἀλλὰ δὴ πάλιν. Ἔςωσαν διάμετροι αἱ αβ, βγ. ὅτι οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων. Ἤχθω τῷ αβ κύκλῳ ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ δβε· ὀρθὴ ἄρα ἐςὶν ἡ ὑπὸ αβε γωνία. Καὶ ἐςὶ διάμετρος ἡ βγ. ἡ δε ἄρα ἐφαπτομένη τῷ βγ κύκλῳ κατὰ τὸ β σημεῖον [21]). ἀλλὰ γὰρ καὶ τῷ αβ κύκλῳ ἐφάπτεται κατὰ τὸ β. Καὶ ὁ αβ ἄρα κύκλος τῷ βγ κύκλῳ ἐφάπτεται κατὰ τὸ β. Φανερὸν δὲ καὶ ἄτως [22]). Ἐι γὰρ ἐκβληθείη ἡ γζ ἐπὶ τὸ δ, γένοιτο ἂν τὸ ὑπὸ γδζ ἴσον τῷ ἀπὸ δβ [23]), διὰ τὸ ὀρθὴν γίνεσθαι τὴν πρὸς τῷ ζ γω-

[19]) ἐπὶ τὴν βγ. [20]) Verba ἐπὶ τῆς βγ desunt in Mſptis. [21]) Duae diverſae hujus Lemmatis Demonſtrationes in Mſptis confuſae prorſus leguntur. Ita poſt σημεῖον ſtatim habent verba: εἰ γὰρ ἐκβλ. — πρὸς τῷ β ὀρθῆς. Reſtituere omnia ad modum Lemmatis 5ti tentavi. [22]) Φανερὸν — ἄτως deſunt [23]) αβ.

θέν. Θέσει ἄρα ἐςὶν ἡ αε. Θέσει δὲ καὶ ὁ κύκλος. δοθὲν ἄρα τὸ β σημεῖον. ἔςι δὲ καὶ ἑκάτερον τῶν δ, ε δοθέν. δοθεῖσα ἄρα ἐςὶν ἑκατέρα τῶν δβ, βε τῇ θέσει. Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα ἕτως. Ἔςω ὁ μὲν κύκλος ὁ αβγ, τὰ δὲ δοθέντα δύο σημεῖα δ, ε. Κείσθω τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τῦ ε ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς δε, καὶ ἄλλης τινὸς τῆς εζ, καὶ ἀπὸ τῦ ζ τῦ αβγ κύκλυ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ζα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αε. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ δβ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αγ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐςιν ἡ αγ τῇ δε. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ζεδ ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης, ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ αεβ ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης, ἴσον ἄρα ἐςὶ τὸ ὑπὸ αεβ τῷ ὑπὸ ζεδ. ἴση ἄρα ἐςὶν ἡ ὑπὸ ζαε γωνία τῇ ὑπὸ βδε γωνίᾳ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ζαε γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι τῇ ὑπὸ αγβ. Καὶ ἡ ὑπὸ αγβ ἄρα γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ βδε γωνίᾳ. Καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ. Παράλληλος ἄρα ἐςὶν ἡ αγ τῇ δζ.

Εἰς τὸ ιζ [10]).

Fig. 16.

ια) Ἔςωσαν δύο κύκλοι οἱ αβγ, αεδ, ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων κατὰ τὸ α σημεῖον, καὶ διήχθωσαν ἀπὸ τῦ α εὐθεῖαι αἱ αδβ, αεγ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δε, βγ· ὅτι παράλληλοί εἰσιν αἱ δε, βγ. Ἤχθω ἀπὸ τῦ α ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ ζη· ἴση ἄρα ἐςὶν ἡ ἀπὸ ζαβ γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ αγβ, αεδ· ὥςε καὶ ἡ ὑπὸ αγβ γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ αεδ. Παράλληλος ἄρα ἐςὶν ἡ δε τῇ βγ. Ἀλλὰ παράλληλος ἔςω ἡ δε τῇ βγ [11]). ὅτι ἐφάπτονται οἱ αβγ, αδε κύκλοι ἀλλήλων. Ἤχθω γὰρ τῦ αβγ κύκλυ ἐφαπτομένη

 ἡ

[10]) MSS. habent ιδ. At, quum septimum jam Lemma ab 16tam Propositionem, decimum tertium vero ad 18vam pertineat, nostrum hoc Lemma non nisi ad 17mam pertinere potest.

[11]) ἀλλὰ — τῇ βγ. Commandino monente addidi.

ἡ ζη· ἴση ἄρα ἐςὶν ἡ ὑπὸ ζαδ γωνία τῇ γ γωνίᾳ. ἀλλὰ ἡ γ γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ε. Καὶ ἡ ὑπὸ ζαδ ἄρα γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ε γωνίᾳ. ὥςε ἐφαπτομένη ἡ ζη τοῦ αδε κύκλου. Τοῦτο γὰρ προδέδεικται.

Πρόβλημα εἰς τὸ αὐτό.

Fig. 17.

ιβ) Θέσει δοθέντος [32]) κύκλου τοῦ αβγ, καὶ δύο δοθέντων τῶν δ, ε, κλᾶν [33]) τὴν δαε. καὶ ποιεῖν παράλληλον τὴν βγ τῇ δε. Γεγονέτω. καὶ ἀπὸ τοῦ β ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ βζ. Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ βζ, τέμνει δὲ ἡ βγ, ἴση ἐςὶν ἡ [34]) ὑπὸ ζβγ γωνία, τουτέςιν ἡ ὑπὸ δζβ γωνία τῇ α. Ἐν κύκλῳ ἄρα ἐςὶ τὰ α, β, ε, ζ σημεῖα. ἴσον ἄρα ἐςὶ τὸ ὑπὸ αδβ τῷ ὑπὸ εδζ. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ αδβ [35]), ἴσον γὰρ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ δ. [36]) δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ εδζ. Καὶ ἐςὶ δοθεῖσα ἡ εδ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ δζ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἐςὶ δοθὲν τὸ δ. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ζ. ἀπὸ δὴ δοθέντος σημείου τοῦ ζ, τῇ θέσει δὲ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένη ἦκται ἡ ζβ. δέδοται ἄρα ἡ ζβ τῇ θέσει. ἀλλὰ καὶ ὁ αβγ κύκλος θέσει. δοθὲν ἄρα ἐςὶ τὸ β σημεῖον. ἔςι δε καὶ τὸ δ δοθέν. θέσει ἄρα ἐςὶν ἡ βδ [37]). θέσει δὲ καὶ ὁ κύκλος. δοθὲν ἄρα ἐςὶ τὸ α. ἔςι δὲ καὶ τὸ ε δοθέν δοδεῖσα [38]) ἄρα ἐςὶν ἑκατέρα τῶν δα, αε τῇ θέσει. Συντεθήσεται δὲ τὸ πρόβλημα οὕτως. Ἔςω ὁ μὲν κύκλος ὁ αβγ, τὰ δὲ δοθέντα σημεῖα τὰ δ, ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ εδζ, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ τοῦ αβγ κύκλου ἐφαπτομένη [39]) εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ζβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ, ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ α, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, βγ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐςιν ἡ βγ τῇ δε. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ εδζ ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφα-

[32]) ὄντος. [33]) κλᾶν δοθεῖσαν. [34]) τῇ ὑπὸ ζβγ. [35]) τὸ ὑπὸ λαμβ. [36]) τῷ ἀπὸ τῆς βζ δοθέντι. [37]) ἡ αδ. [38]) δοθεῖ. [39]) ἐφαπτομένη deest.

ἐφαπτομένης, ἴση ἄρα ἐςὶν ἡ α γωνία, τετέςιν ἡ ὑπὸ γβζ (ἐφάπτεται γὰρ ἡ βζ, τέμνει δὲ ἡ βγ) τῇ [40]) ὑπὸ βζδ. Καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ. Παράλληλος [41]) ἄρα ἐςὶν ἡ βγ τῇ δε.

Πρόβλημα εἰς τὸ ιη.

Fig. 18.

ιγ) Θέσει δοθέντος κύκλε τε αβγ, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν δ, ε, ἀπὸ τῶν δ, ε κλᾶν [42]) τὴν δαε [43]), καὶ ποιεῖν τὴν δε παράλληλον τῇ βγ. Γεγονέτω, καὶ ἤχθω ἀπὸ τε β τε αβγ κύκλε ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἡ βζ. ἴση ἄρα ἐςὶν ἡ ὑπὸ ζβδ γωνία τῇ γ, τετέςι τῇ ε. ἐν κύκλῳ ἄρα ἐςὶ τὰ β, ζ, α, ε σημεῖα. Τὸ ἄρα ὑπὸ βδα ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ ζδε. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ βδα, ἀπὸ γὰρ δοθέντος τε δ [44]) εἰς θέσει δεδομένον τὸν κύκλον [45]) διῆκται ἡ αδβ. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ζδε. Καὶ ἐςὶ δοθεῖσα ἡ δε. δεθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ζδ. Καὶ ἐςὶ δοθὲν τὸ δ. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ζ. ἀπὸ δὴ δοθέντος σημείε τε ζ θέσει δοθέντος κύκλε ἐφαπτομένη ἦκται ἡ ζβ. [46]) θέσει ἄρα ἐςὶν ἡ ζβ. θέσει δὲ καὶ ὁ κύκλος. δοθὲν ἄρα ἐςὶ καὶ τὸ β σημεῖον. ἀλλὰ καὶ τὸ δ δοθέν. θέσει ἄρα ἐςὶν ἡ βδ [47]). θέσει δὲ καὶ ὁ κύκλος. δοθὲν ἄρα ἐςὶ καὶ τὸ α σημεῖον. ἔςι δὲ καὶ ἑκάτερον τῶν δ, ε δοθέν. δοθεῖσα ἄρα ἐςὶν [48]) ἑκατέρα τῶν δα, αε τῇ θέσει. Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα ὅτως. Ἔςω ὁ μὲν τῇ θέσει δεδομένος κύκλος ὁ αβγ, τὰ δὲ δοθέντα δύο σημεῖα τὰ δ, ε, καὶ διήχθω τυχᾶσα ἡ αδβ, καὶ τῷ ὑπὸ αδβ ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ εδζ, τετέςι τε αβγ κύκλε ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ βζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γεα. Ἐπεὶ ὖν ἴση ἐςὶν ἡ ὑπὸ ζβδ γωνία τῇ ὑπὸ δεα (ἐν κύκλῳ γὰρ

[40]) τὴν ὑπὸ βζδ. [41]) παράλληλος deest. [42]) κλᾶν δοθῆ. [43]) αλε.
[44]) α. [45]) δεδομένην γωνίαν. [46]) MSS. habent: καὶ ἐςὶ δοθὲν τὸ δ. κύκλε ἄρα ἐφαπτομένη etc. [47]) βα. [48]) ἑκατέρα τῶν δ, ε δοθέντων. δοθὲν ἄρα ἐςὶν etc.

γὰρ ἐςὶ τὰ α, β, ε, ζ σημεῖα) ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ζβδ ἴση ἐςὶ τῇ γ (ἐφάπτεται γὰρ καὶ τέμνει) καὶ ἡ γ ἄρα γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ε. Παράλληλος ἄρα ἐςὶν ἡ βγ τῇ δε. ὅπερ ἔδει —

Πρόβλημα εἰς τὸ ιθ.

Fig. 20.

ιδ) Θέσει δοθέντος [49]) τοῦ αβγ κύκλου, καὶ [50]) δύο δοθέντων τῶν δ, ε· κλᾶν ἀπὸ τῶν δοθέντων [51]) τὴν δαε, ὥςε παράλληλον εἶναι τὴν βγ τῇ δε. Γεγονέτω, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ βζ· γίνεται ἐν πάλιν ἐν κύκλῳ τὰ α, ζ, β, ε σημεῖα· καὶ ἴσον τὸ ὑπὸ αδθ τῷ ὑπὸ εδζ. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ αδβ. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ εδζ. Καὶ ἐςὶ δοθεῖσα ἡ δε. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ δζ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει. Καὶ ἐςὶ δοθὲν τὸ δ. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ζ. ὥςε θέσει ἡ βζ· ἀλλὰ καὶ ὁ κύκλος. δοθὲν ἄρα ἐςὶ τὸ β. ἀλλὰ καὶ τὰ δ, ε. δοθεῖσα ἄρα ἐςὶν ἑκατέρα τῶν δα, αε. ὁμοίως γὰρ τοῖς πρότερον δείξομεν, καὶ ὁμοίως ἡ σύνθεσις τοῦ πρὸ αὐτοῦ.

Εἰς τὸ κδ.

Fig. 21.

ιε) Ἀπτέσθωσαν δύο κύκλοι ἀλλήλων οἱ αβ, βγ κατὰ τὸ β σημεῖον· καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα αὐτῶν τὰ δ, ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, δβ, γε, εβ, ἔςω δὲ παράλληλος ἡ αδ τῇ γε· ὅτι εὐθεῖαι εἰσὶν αἱ διὰ τῶν δβε, αβγ. Ἤχθω γὰρ τῶν αβ, βγ κύκλων ἐφαπτομένη ἡ ζη. Ἐκ δὲ τοῦ κέντρου ἐςὶν ἡ δβ. ὀρθὴ ἄρα ἐςὶν ἡ ὑπὸ τῶν δβζ γωνία. διὰ ταῦτα καὶ ἡ ὑπὸ ζβε γωνία ἐςὶν ὀρθή. εὐθεῖα ἄρα ἐςὶν ἡ διὰ τῶν δβε. Ἐπεὶ δὲ ἴση ἐςὶν ἡ μὲν αδ τῇ δβ, ἡ δὲ εγ τῇ εβ, ἐςὶν ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν δβ, οὕτως ἡ εγ πρὸς τὴν εβ. Καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς δ, ε αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ἴση ἄρα ἐςὶν ἡ ὑπὸ δβα γωνία τῇ ὑπὸ γβε. καὶ ἐςὶν εὐθεῖα ἡ δβε. εὐθεῖα ἄρα ἐςὶ καὶ ἡ διὰ τῶν α, β, γ. ὅπερ —

Εἰς

[49]) ὄντος. [50]) καὶ deest. [51]) κλᾶν δοθέντων.

'Εις τὸ κε.

Fig. 22.

ις) Ἴσης ἴσης τῆς μὲν αβ τῇ βγ, τῆς δὲ αδ τῇ δε, καὶ παραλλήλε ἴσης τῆς δε τῇ βγ. δεῖξαι, ὅτι εὐθεῖά ἐςιν ἡ διὰ τῶν α, ε, γ σημείων. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, εγ, καὶ τῇ αε παράλληλος ἤχθω ἡ βζ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ εδ ἐπὶ τὸ ζ. ἴση ἄρα ἐςὶν ἡ δζ τῇ δβ. ἔςι δὲ καὶ ἡ αδ τῇ δε ἴση. ὅλη ἄρα ἡ αβ ὅλη τῇ ζε ἐςὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ ἡ αβ τῇ βγ ιση ἐςί. καὶ ἡ βγ ἄρα τῇ ζε ἐςὶν ἴση. ἀλλὰ παράλληλός ἐςιν. καὶ ἡ βγ ἄρα τῇ ζε ἐςὶν ἴση. ἀλλὰ παράλληλός ἐςιν. εὐθεῖα ἄρα ἐςὶν ἡ αεγ. τᾶτο γὰρ φανερόν.

'Εις τὸ λα.

Fig. 23.

ιζ) Ἐὰν ᾖ κύκλος ὁ αβγ, καὶ δύο προβληθῶσιν αἱ βδ, δγ ἴσαι ἔσαι, ἡ δὲ βδ ἐφάπτεται· ὅτι καὶ ἡ δγ ἐφάπτεται. Τᾶτο δὲ φανερόν, ἂν γὰρ διαχθῇ ἡ δα, τὸ ὑπὸ αδε ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ δβ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ δβ τῷ ἀπὸ δγ ἴσον ἐςί. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αδε ἄρα ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ δγ. ἐφάπτεται ἄρα ἡ δγ τᾶ αβγ κύκλα.

Fig. 21.

ιη) Δύο κύκλοι οἱ αβ, βγ, καὶ διὰ τᾶ β διήχθω τὶς ἡ αβγ, καὶ δύο παράλληλοι αἱ αδ, εγ νεύσασαι ἐπὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων· ὅτι οἱ αβ, βγ κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ β σημεῖον. Εἰλήφθω τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ δ, ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δβ, βε. εὐθεῖα ἄρα ἐςὶν ἡ διὰ τῶν δβε. Παράλληλος γὰρ [52]) ἐςὶν ἡ αδ τῇ γε, καὶ ἐςὶν ὡς ἡ αδ πρὸς δβ [53]), ὅτως ἡ γε πρὸς εβ. καὶ γίνεται δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα τὴν α τῇ γ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς δ, ε τὰς πλευρὰς ἀνάλογον. ἰσογώνια ἄρα ἐςὶ τὰ τρίγωνα. ἴση ἄρα ἐςὶν ἡ ὑπὸ αβδ γωνία τῇ ὑπὸ γβε, καὶ ἐςὶν εὐθεῖα ἡ αβγ. εὐθεῖα ἄρα ἐςὶ καὶ ἡ δβε.

52) ἄρα. 53) αβ.

δβε. Ἐπεὶ δὲ εὐθεῖά ἐςιν ἡ διὰ τῶν κέντρων καὶ τῆς ἀφῆς, ἐφάπτονται ἄρα οἱ αβ, βγ κύκλοι ἀλλήλων κατὰ τὸ β σημεῖον. ὅπερ —

Εἰς τὸ νβ.

Fig. 24.

ιθ) Ἔςω ἡ μὲν αβ τῇ γδ παράλληλος, ἴση δὲ ἡ αγ τῇ βδ, ἔσης ἀμβλείας μὲν τῆς ὑπὸ τῶν αγδ, ὀξείας δὲ τῆς ὑπὸ βδγ· ὅτι παραλληλόγραμμόν ἐςι τὸ αδ. Ἐπεὶ ἀμβλεῖα μέν ἐςιν ἡ ὑπὸ αγδ, ὀξεῖα δέ ἡ ὑπὸ βδγ, αἱ ἀπὸ τῶν α, β ἐπὶ τὴν γδ κάθετοι ἀγόμεναι ἡ μὲν ἀπὸ τῦ α ἐκτὸς τῦ γ, ἡ δὲ ἀπὸ τῦ β ἐντὸς τῦ δ. Πιπτέτωσαν, καὶ ἔςωσαν αἱ αε, βζ. ἔςι δὲ καὶ ἡ αβ τῇ γδ παράλληλος. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς ε, ζ σημείοις γωνίαι. ἴση ἄρα ἐςὶ καὶ ἡ ζδ τῇ εγ. ὥςε καὶ ὅλη ἡ εζ τῇ γδ ἐςὶν ἴση. Καὶ ἡ αβ ἄρα τῇ γδ ἐςὶν ἴση.

Fig. 25.

κ) Δύο ἴσοι κύκλοι οἱ αβ, δγ, καὶ διὰ τῶν κέντρων ἡ αδ, καὶ τῇ γδ παράλληλος ἡ εζ· λέγω ὅτι ἐκβληθεῖσα τέμνει καὶ τὸν αβ κύκλον. Εἰλήφθω τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ η, θ, καὶ ἀπὸ τῶν η, θ σημείων τῇ αδ ὀρθαὶ ἤχθωσαν αἱ ηκ, θλ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κλ. Καὶ ἴση ἐςὶν ἡ ηκ τῇ θλ [54]), ἀλλὰ καὶ παράλληλος· καὶ ἡ κλ ἄρα [55]) τῇ ηθ ἴση ἐςὶ καὶ παράλληλος, ὥςε ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς κ, λ γωνίαι. καὶ εἰσὶν ἐκ τῶν κέντρων αἱ ηκ, θλ. ἡ κλ ἄρα ἐφάπτεται τῶν κύκλων. Φανερὸν ἦν, ὅτι ἡ τῦ δγ ἐφαπτομένη ἐφάπτεται καὶ τῦ αβ. ἡ ἄρα τὸν γδ τέμνυσα ἡ εζ καὶ τὸν αβ τέμνει. ἐκβληθεῖσα δὲ καὶ μεταξὺ τῶν β, λ ἔςαι, ὡς ἡ εζ τῶν γ, κ ἐςὶ μεταξὺ, ἡ εζ μείζων.

Fig. 26.

κα) Ἔςω ἴση ἡ μὲν δα τῇ αε, μείζων δὲ ἡ βδ τῆς γε, καὶ ἐπεζεύχθω· ἡ δε· ὅτι ἐκβληθεῖσα ἡ δε συμπίπτει

τῇ

[54]) MSS. habent saltim verba: ἤχθωσαν αἱ ηκ τῇ θλ. [55]) ἄρα deest.

τῇ βγ· Κείσθω τῇ γε ἴση ἡ δζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γζ. Παράλληλος ἄρα ἐςὶ τῇ δε, καὶ συμπίπτει τῇ βγ. Καὶ ἡ δε ἄρα συμπίπτει τῇ βγ.

Πρόβλημα εἰς τὸ αὐτό.

Fig. 27.

κβ) Θέσει δοθέντος [56]) κύκλε τῦ αβγ, καὶ [57]) τριῶν δοθέντων σημείων τῶν δ, ε, ζ ἐπ' εὐθείας, κλᾶν τὴν δαε [58]), καὶ ποιεῖν ἐπ' εὐθείας τὴν βγ τῇ γζ. Γεγονέτω, καὶ διὰ τῦ β τῇ δζ παράλληλος ἤχθω ἡ βη, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηγ. ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ θ. ἴση ἄρα ἐςὶν ἡ ὑπὸ βηγ γωνία, τετέςιν ἡ α, τῇ ὑπὸ γθζ γωνίᾳ. Τὸ ἄρα ὑπὸ αεγ ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ δεθ. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ αεγ, ἴσον γὰρ τῷ ἀπὸ τῆς ἀπὸ τῦ ε ἐφαπτομένης. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν δεθ. Καὶ ἐςὶ δοθεῖσα ἡ δε. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ εθ [59]). ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει. καὶ ἐςὶ δοθὲν τὸ ε. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ θ. ἔςι δὲ καὶ τὸ ζ δοθέν. γέγονε δή [60]) μοι ἀπὸ δύο δοθέντων τῶν θ, ζ κλᾶν [61]) τὴν θγζ, καὶ ποιεῖν παράλληλον τὴν βη τῇ θζ. τῦτο δὲ προγέγραπται. δοθὲν ἄρα τὸ γ. ἀλλὰ καὶ τὸ ε δοθέν. θέσει ἄρα ἡ γε. ἀλλὰ καὶ ὁ κύκλος δοθείς, δοθὲν ἄρα τὸ α. ἔςι δὲ καὶ τὸ δ δοθέν. θέσει ἄρα καὶ ἡ δα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα ὕτως. Ἔςω ὁ μὲν κύκλος ὁ αβγ, τὰ δὲ δοθέντα ἐπ' εὐθείας τρία σημεῖα τὰ δ, ε, ζ. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ δεθ. καὶ δύο δοθέντων τῶν θ, ζ, εἰς τὸν κύκλον ἀπὸ τῶν θ, ζ κεκλάσθω ἡ ὑπὸ τῶν θγζ γωνία [62]), ὥςε παράλληλον εἶναι τὴν βη τῇ θζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εγ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ α [63]). λέγω, ὅτι εὐθεῖά ἐςιν ἡ διὰ τῶν α, β, δ. Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερον τῶν ὑπὸ αεγ, δεθ ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ

[56]) ὄντος. [57]) καὶ deest. [58]) κἂν δοθεῖσαν τὴν δαε. [59]) ζθ.
[60]) Argent. habet δὲ. [61]) κλᾶν. [62]) κεκλάσθω εὐθεῖα.
[63]) καὶ ἐπεζεύχθω — ἐπὶ τὸ α Commandino monente addidi.

ἀπὸ τῆς ἀπὸ τȣ̃ ε ἐφαπτομένης, ἴσον ἐςὶ τὸ ὑπὸ αεγ τῷ ὑπὸ δεϑ. ἐν κύκλῳ ἄρα ἐςὶ τὰ δ, ϑ, γ, α σημεῖα. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐςὶν ἡ ὑπὸ βηγ γωνία τῇ ὑπὸ γϑζ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ βηγ ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ βαγ ἐν κύκλῳ, ἡ ὑπὸ βαγ ἄρα γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ γϑε γωνίᾳ. Καὶ ἐςὶν ἐν κύκλῳ τὰ α, γ, δ, ϑ σημεῖα. ἐπ' εὐϑείας ἄρα ἐςὶν ἡ αβ τῇ βδ. Ὅπερ μόνοι δ' αὐτȣ̃, καὶ τὰ πτωτικὰ ἀπάγεται εἰς τὰ πτωτικὰ τȣ̃ εἰς τὸ ις [64]).

Fig. 29.

κγ) Ἐςωσαν δύο κύκλοι οἱ αβ, γδ, καὶ ἐκβεβλήσϑω ἡ αδ, καὶ πεποιήσϑω ὡς ἡ εη πρὸς τὴν ηζ [65]), ȣ̔́τως ἡ ἐκ τȣ̃ κέντρȣ τȣ̃ αβ κύκλȣ πρὸς τὴν ἐκ τȣ̃ κέντρȣ τȣ̃ γδ κύκλȣ· ὅτι ἡ ἀπὸ τȣ̃ η διαγομένη τέμνȣσα τὸν γδ κύκλον ἐκβληϑεῖσα καὶ τὸν αβ τέμνει. Εἰλήφϑω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ ε, ζ σημεῖα, καὶ ἀπὸ τȣ̃ η τȣ̃ γδ κύκλȣ ἐφαπτομένη ἤχϑω ἡ ηϑ. καὶ ἐπεζεύχϑω ἡ ζϑ. Παράλληλος ἤχϑω ἡ εκ. Ἐπεὶ ȣ̃ν ἐςὶν ὡς ἡ εη πρὸς τὴν ηζ, ȣ̔́τως ἡ εκ πρὸς τὴν ζϑ, εὐϑεῖα ἄρα ἐςὶν ἡ διὰ τῶν η, ϑ, κ. καὶ ἐςὶν ὀρϑὴ ἡ ϑ γωνία· ὀρϑὴ ἄρα καὶ ἡ κ γωνία. ὥςε ȣ̔ τȣ̃ γδ ἐφάπτεται ἡ ἀπὸ τȣ̃ η ἐκβληϑεῖσα, καὶ τȣ̃ αβ ἐφάπτεται, Ἀλλὰ καὶ τέμνȣσαι τὸν γδ μεταξὺ τῶν ϑ, ϑ εἰσίν. ἐκβαλλόμεναι ἄρα μεταξὺ τῶν κ, β ἔσονται. Καὶ ἐςὶν ἐφαπτομένη ἡ ηκ. τέμνει ἄρα ἡ μεταξὺ τῶν β, κ, δ, ϑ [66]). ἀλλ' ἡ αὐτὴ καὶ τὸν αβ τέμνει ἀγομένη ἀπὸ τȣ̃ η σημείȣ.

Τὸ πρῶτον τῶν ἐπαφῶν προβλήματα ἑπτὰ, τὸ δεύτερον προβλήματα τέσσαρα [67]).

[64]) Corruptiſſima haec ſunt in Mſſ. 2368 habet: ὅπερ μόνοι δ' αὐτȣ̃, καὶ τὰ πτωτικὰ ἀπάγεται γὰρ εἰς τὰ πτωτικὰ τȣ̃ εἰκοςȣ̃ τὸ ἀπάγεται. 2440: ὅπερ — ἀπάγεται εἰς τὰ πτωτικὰ τȣ̃ ἐς τȣ̃το ἀπάγεται. Argent: — ἀπάγεται γὰρ τȣ̃ ἐς τȣ̃το ἀπάγεται.
[65]) ηδ. [66]) β, κ, ζ, ϑ. [67]) Supra jam ad finem eorum, quae ex Praefatione Pappi huc pertinent, monui, me de veritate horum

PAPPI ALEXANDRINI LEMMATA AD LIBROS DE TACTIONIBUS.

Obſervat. Quum ea, quae ex Pappo jam latino Idiomate ſequuntur, Lemmata, pluribus locis illuſtratione aliqua opus habere viderentur, nonnulla eo ſpectantia praemittenda, vel ipſis Pappi Propoſitionibus interſperenda putavi, quae tamen omnia addito ſigno * diſtinxi, vel etiam uncis incluſi. Quin in ipſo Euclide, cujus Elementa aeque ac Data in hoc libello jure fundamenti loco ponuntur, circa hanc cauſſam non omnia ita explicata

horum numerorum dubitare. Quum tamen iidem numeri jam altera vice, et hic quidem non caracteribus tantum, ſed ipſis verbis expreſſi legantur, cogitavi, an forte probabili aliqua ratione retineri poſſent, atque hoc ita tantum fieri poſſe vidi, ſi ſumatur, Apollonium de iis Caſibus, quibus tria puncta data ſunt, aut tres rectae, demum ad calcem operis ſui, adeoque in libro II. breviter monuiſſe; tum enim, additis duobus Caſibus, quos Pappus ipſe in ſecundo libro tractatos fuiſſe dicit, liber II. continebat omnino quatuor Problemata; in libro I. vero praeter ſex reliquos Caſus illud adhuc Problema erat, quod Apollonianis ab aliis pro Introductorio additum dicit Pappus, quod, ſi non ſecundum diverſos ſuos caſus, ſed pro uno tantum Problemate numeretur, habebat omnino liber I. Problemata ſeptem. At, ſi haec conjectura vera ſit, ſupra in praefatione Pappi, ubi de eo caſu loquitur, quo tres rectae datae ſunt, quarum duae ſunt inter ſe parallelae, loco προγράφεται legendum erit προσγράφεται

cata eſſe videntur, ut in libris tanta cura ſingula quaevis pertractantibus, ac in Apollonii his factum fuiſſe apparet, nihil ſubinde addendum fuerit. Ut enim taceam, quae circa demonſtrationes Propoſitionum 6, III; 11, III; 12, III; 13, III paſſim Viri docti monuerunt, Euclides in ipſis his Propoſitionibus *notiones* circulorum, qui *extra* vel *intra* ſe contingunt, tanquam vulgo notas ſupponit. Deinde in Definitione generaliore circulorum, qui ſe contingere dicuntur, pariterque in Def. 2, III. ſumit, quod probari demum debebat, circulos ſe invicem contingentes *nusquam* ſe ſecare, pariter ac de recta circulum contingente id demonſtratur 18, III. coll. 16, III. Quin ipſa etiam notio circulorum ſe invicem ſecantium haud legitime hic poſita videtur, quum antea explicatum non ſit, quo caſu circuli ſe invicem ſecare dicantur. Denique, quum veriſſimum ſit, quod illuſtr. Käſtnerus monet, internam eorum veritatem, quae Mathematici in Definitionibus ſuis ponunt, ex conſtructione demum demonſtrari, oſtendendum erat, qua ratione conſtrui poſſint circuli qui ſe invicem extra vel intra contingant (de rectis enim Cor. 16, III. id oſtenſum fuit.) Atque haec talia ſi quis inanes minutias cenſuerit, Apollonium certe aliter de ea re judicaſſe, perſuaſum mihi habeo. Liceat itaque his uti Definitionibus.

* Defin. 1.

Si duo circuli punctum aliquod commune habeant, ea vero puncta unius circuli, quae iſti puncto communi proxima ſunt, ex una puncti communis parte extra alterum circulum, ex altera vero ejus parte intra alterum circulum poſita ſint; tum duo iſti circuli in puncto hoc communi ſe invicem ſecare dicuntur. Similis erit Definitio rectae, quae circulum ſecat.

* De-

* Defin. 2.

Si duo circuli punctum aliquod commune habeant, neque se *in hoc puncto* secent, i. e. si ea puncta unius circuli, quae ex utraque parte isti puncto proxima sunt, vel ex utraque parte extra alterum circulum, vel ex utraque parte intra alterum circulum posita sint; tum duo isti circuli se in hoc puncto contingere dicuntur. *)

* Defin. 3.

Duo circuli *extra* se in puncto aliquo contingere dicuntur, si illud punctum commune habeant, ea vero puncta *utriusvis* circuli, quae isti puncto proxima sunt, ex utraque parte posita sint extra alterum circulum.

* Defin. 4.

Duo circuli *intra* se in puncto aliquo contingere dicuntur, si illud punctum commune habeant, ea vero puncta unius circuli, quae isti puncto proxima sunt, ex utraque parte posita sint intra alterum circulum (adeoque ea puncta alterius circuli, quae isti puncto proxima sunt, ex utraque parte posita sint extra alterum circulum.)

Pappi Lemm. I. Ad Problema V. (Libri VII. Collect. Mathem. Prop. XCVI.)

Fig. 1.

Sint $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ duae parallelae, quas circulus $\epsilon\zeta$ in punctis ϵ, ζ contingat, jungaturque recta $\epsilon\zeta$: ostendi oportet, $\epsilon\zeta$ esse circuli diametrum.

Sumantur in peripheria circuli (è diversis rectae $\epsilon\zeta$ partibus) puncta η, θ, et jungantur rectae $\epsilon\eta$, $\eta\zeta$, $\epsilon\theta$, $\theta\zeta$. Quoniam igitur $\alpha\epsilon$ tangit, $\epsilon\zeta$ vero secat circulum, angulus

*) Cf. Kästners Analys. endlich. Gröss. §§. 449. 451.

lus $\alpha\iota\zeta$ aequalis est angulo $\iota\vartheta\zeta$, qui in alterno circuli segmento constituitur (32, III.), eandemque ob caussam angulus $\delta\zeta\iota$ aequalis est alterno $\iota\alpha\zeta$. Anguli itaque $\iota\vartheta\zeta$, $\alpha\iota\zeta$ sunt inter se aequales [aequales quippe sunt aequalibus (29, I.) $\alpha\iota\zeta$, $\delta\zeta\iota$.] Aequantur autem duobis rectis (32, III.). Uterque igitur eorum rectus est. Proinde utrumque segmentum $\iota\vartheta\zeta$, $\alpha\iota\zeta$ semicirculus erit (2. Schol. 31, III.) Quare recta $\iota\zeta$ circuli $\iota\zeta$ est diameter. (18. Def. I.) Q. E. D.

Lemm. II. (Libri VII. Prop. XCVII.)

Fig. 2.

Sit circulus $\alpha\beta\gamma$, quem tangant rectae $\beta\delta$, $\delta\alpha$, et angulus δ bifariam secetur recta $\gamma\delta$ (quae occurat circulo in punctis γ et ϵ): ostendi oportet, centrum circuli $\alpha\beta\gamma$ esse in recta $\gamma\delta\epsilon$. Jungantur rectae $\gamma\alpha$, $\alpha\epsilon$, $\gamma\beta$, $\beta\epsilon$. Quoniam igitur $\alpha\delta$ tangit, $\gamma\delta$ vero secat circulum, rectangulum $\gamma\delta \times \delta\epsilon$ aequale est quadrato ex $\delta\alpha$ (36, III.); aequalis itaque est angulus $\delta\alpha\epsilon$ angulo $\alpha\gamma\delta$ (17, VI. coll. 6, VI.) Eandem ob caussam anguli $\delta\beta\epsilon$, $\beta\gamma\delta$ aequales sunt. At angulus $\alpha\gamma\delta$ aequalis est angulo $\beta\gamma\delta$ [quia nimirum in triangulis $\alpha\gamma\delta$, $\beta\gamma\delta$ recta $\alpha\delta$ aequalis est rectae $\beta\delta$ (2. Schol. 36, VI.), $\gamma\delta$ communis, ac angulus δ bifariam sectus est, adeoque $\delta\alpha\gamma = \delta\beta\gamma$, et $\alpha\gamma\delta = \beta\gamma\delta$ (4, I.)]: itaque angulus $\delta\alpha\epsilon$ aequalis est angulo $\delta\beta\epsilon$. Angulus autem $\delta\alpha\gamma$ aequalis est angulo $\delta\beta\gamma$, unde angulus $\epsilon\alpha\gamma$ aequalis est angulo $\epsilon\beta\gamma$ (3 Ax. I.). Sunt vero anguli $\epsilon\alpha\gamma$, $\epsilon\beta\gamma$ duobus rectis aequales (22, III.); quare uterque eorum rectus est. $\gamma\epsilon$ itaque diameter est circuli $\alpha\beta\gamma$ (2. Schol. 31, III. et 18 Def. I.) ac centrum circuli $\alpha\beta\gamma$ est in recta $\delta\gamma\epsilon$ (17, Def. I.)

Lemm. III. Ad XII. (Libri VII. Prop. XCVIII.)

Fig. 3.

Sint duo circuli $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, qui in puncto β extra se con-

contingant, et ducatur recta $\alpha\beta\gamma$, in qua ſit centrum circuli $\alpha\beta$: dico, etiam circuli $\beta\gamma$ centrum eſſe in recta $\alpha\beta\gamma$. Ducatur enim recta $\delta\beta\epsilon$, utrumque circulum contingens: rectus igitur eſt angulus $\alpha\beta\delta$ (18, III.) quare $\delta\beta\gamma$ angulus deinceps rectus eſt. (13, I.) Contingit vero $\delta\epsilon$ circulum $\beta\gamma$. Centrum igitur circuli $\beta\gamma$ eſt in recta $\beta\gamma$ (19, III.) pariter ac centrum circuli $\alpha\beta$.

Lemm. IV. (Lib. VII. Prop. XCIX.)

Vice verſa. Fig. 3.

Sint è contrario $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ circulorum diametri (in eadem recta è diverſis partibus puncti β, quod commune habent, ſitae): oſtendendum eſt, circulos $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ (in puncto β extra) ſe contingere. Ducatur iterum $\delta\epsilon$, quae circulum $\alpha\beta$ (in β) contingat. (Cor. 16, III. et 11, I.); rectus itaque eſt angulus $\alpha\beta\delta$ (18, III.), adeoque etiam angulus deinceps $\delta\beta\gamma$ (13, I.). Eſt autem utrumque centrum circulorum in recta $\alpha\beta\gamma$. $\delta\epsilon$ itaque contingit circulum $\beta\gamma$ (Cor. 16. III.) at eadem etiam circulum $\alpha\beta$ in eodem puncto contingit. Circuli igitur $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ ſe invicem in puncto β (extra) contingunt. Eadem figura inſervit huic Lemmati, quae praecedenti.

Lemm. V. (Lib. VII. Prop. C.)

Fig. 4.

Sint duo circuli $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, qui in puncto β (intra) ſe contingant, et ducatur recta $\alpha\gamma\beta$, in qua ſit centrum circuli $\alpha\beta$: dico, etiam centrum circuli $\beta\gamma$ eſſe in recta $\alpha\beta\gamma$. Ducatur recta $\delta\epsilon$, utrumque circulum contingens. Quoniam igitur $\delta\epsilon$ circulum $\alpha\beta$ contingit, et $\alpha\beta$ per centrum tranſit, rectus eſt angulus $\delta\beta\gamma$. (18, III.) Recta vero $\beta\gamma$ ducta eſt à contactu β. Centrum igitur circuli

culi $\beta\gamma$ est in recta $\beta\gamma$ (19, III.). Patet vero etiam ita. Si ducatur recta aliqua $\beta\zeta\eta$, jungaturque rectae $\gamma\zeta$, $\alpha\eta$, fiet angulus $\epsilon\beta\gamma$ aequalis utrique angulorum $\beta\zeta\gamma$, $\alpha\eta\beta$ (32, III.). Est vero angulus $\alpha\eta\beta$ rectus (31, III.) : rectus igitur est etiam angulus $\beta\zeta\gamma$. Itaque centrum circuli $\beta\gamma$ est in recta $\beta\gamma$ (2 Schol. 31, III.). Et similiter, si centrum circuli $\beta\gamma$ datum sit in recta $\alpha\beta$, ostendemus, etiam centrum circuli $\alpha\beta$ esse in eadem recta.

Lemm. VI. (Lib. VII. Prop. CI.)

Et vice versa. Sint $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ circulorum diametri (in eadem recta ex eadem parte puncti β, quod commune habent, sitae): dico, circulos (intra) se contingere. Ducatur recta $\delta\beta\epsilon$, quae circulum $\alpha\beta$ (in β) contingat (Cor. 16, III. et 11, I.). Rectus igitur est angulus $\alpha\beta\epsilon$ (18, III.), et $\beta\gamma$ est diameter: recta igitur $\delta\epsilon$ circulum $\beta\gamma$ in puncto β contingit (Cor. 16, III.). At eadem etiam circulum $\alpha\beta$ in β contingit. Circulus itaque $\alpha\beta$ circulum $\beta\gamma$ in puncto β (intra) contingit. Patet vero etiam ita: Si producatur recta aliqua $\gamma\zeta$, donec rectae $\delta\beta$ (quae circulum $\alpha\beta$ in β contingit) in δ occurrat, fiet, quia angulus ζ rectus est (31, III.), aeque ac angulus β (18, III.) rectangulum $\gamma\delta \times \delta\zeta$ aequale quadrato ex $\delta\beta$ (4, VI. et 17, VI.). Recta igitur $\delta\epsilon$ contingit circulum $\beta\gamma$ (37, III.): eadem autem in eodem puncto β contingit etiam circulum $\alpha\beta$. Circulus $\alpha\beta$ igitur circulum $\beta\gamma$ in puncto β (intra) contingit. Eadem figura, quae in praecedente Lemmate.

* Observat. Pappus in demonstratione Lemm. III. et V. sumit, duci posse rectam, quae duos circulos in puncto aliquo se contingentes etiam ipsa in eodem puncto contingat. Pariter in demonstratione Lemm. IV. et VI. sumit, duos circulos se invicem in puncto aliquo contin-

tin-

tingere, si eadem recta utrumque in eo puncto contingat. Neutrum vero sine demonstratione sumere licebat, quam tamen nec apud Euclidem, nec apud ipsum Pappum deprehendimus. Omnia itaque, quae etiam ex Euclide *ad hanc disquisitionem de duobus circulis se invicem contingentibus* pertinent, justo ordine, servatoque demonstrationis rigore ita exhiberi posse putem.

* *Lemma A.*

Si duo circuli ex eodem centro descripti sint, nullum punctum inter se commune habebunt. Quodsi enim punctum aliquod ipsis commune sit, punctum istud in utroque circulo à centro communi aequaliter distabit. At vero omnia puncta utriusque circuli à centro aequaliter distant, ac punctum illud commune (15. Def. I.). Quare omnia puncta communia erunt utrique circulo, neque jam duo, sed unus saltim circulus descriptus erit, quod est contra hypothesin.

Cor. Si igitur duo circuli se invicem secent vel contingant, vel, ut generaliter dicam, punctum aliquod commune habeant, (Defin. nostr. 1. et 2.) ipsorum idem centrum non erit. Hujus Corollarii partem complectuntur Euclidis Propos. 5, III. et 6, III.

* *Lemma B.*

Recta circulum in pluribus quam duobus punctis secare nequit.

Recta enim, quae circulum secat, aut per centrum circuli transibit, aut non. Ac 1.) si per centrum circuli transeat, secet, si fieri potest circulum in tribus punctis. Quum igitur duo intersectionis puncta necessario sint ex eadem centri parte, unum centro propius, alterum ab eo

 remo-

remotius erit. At vero ex hypothesi utrumque est in circumferentia circuli; itaque utrumque aequaliter distat à centro (15. Def. I. Elem.) Quod est absurdum.

Si vero recta, quae circulum secat, non transeat per centrum; secet iterum si fieri potest, circulum in tribus punctis. Ducantur ad haec tria puncta rectae ex centro. Constituetur itaque inter centrum circuli, ac intersectionis puncta, primum et secundum, triangulum aequicrurum (15. Def. I.), cujus itaque anguli ad basin aequales (5, I.) adeoque uterque recto minor erit (17, I.). Itaque angulus, qui utrique eorum deinceps est, erit major recto (1. Schol. 13, I.) Quae igitur huic angulo deinceps opposita est recta, ad tertium intersectionis punctum ducta, major erit recta ad secundum intersectionis punctum ducta (19, I. collat. 17, I.). At eadem illi est aequalis (15. Def. I.). Quod est absurdum.

Corollar. Ex Demonstratione hac patet, si ab uno puncto circuli, quod primum punctum appellabimus, ad aliud, quod secundum vocabimus, ducatur recta, atque in ea *producta* sumatur tertium punctum, fore hoc tertium punctum extra circulum, sive aliter: punctum quodcunque in recta, quae circulum secat, *producta* sumtum, esse extra circulum.

** Lemma C. (Pappi Lemma VI.)*

Fig. 4.

Sint $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ duorum circulorum diametri in eadem recta ex eadem parte puncti β, quod circuli commune habent, sitae: dico, circulos in puncto β intra se contingere.

Sit enim centrum unius circuli (quem circulum ϵ appellabimus) punctum ϵ; centrum alterius (circuli κ) pun-

punctum κ, et puncta ι, κ non coincident (Cor. Lemm. A). Ex eo centro ι, quod à puncto communi β remotius est, ducatur ad punctum aliquod alterius circuli κ, puncto β quantumvis propinquum, ex una parte puncti β recta aliqua, eritque haec recta minor recta $\iota\beta$ (7, III. vel 8, III.) adeoque punctum illud circuli κ intra circulum ι positum erit. Idem si ex altera parte puncti β fiat, patebit eadem ratione, ex hac etiam parte puncti β puncta circuli κ puncto β proxima intra circulum ι sita esse. Circuli itaque ι et κ in puncto β se invicem intra contingent (Definit. nostr. 4.)

Cor. Patet itaque ratio describendorum duorum circulorum, qui se invicem intra contingant.

* *Lemma D (Pappi Lemm. IV.)*

Fig. 3.

Sint $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ duorum circulorum diametri in eadem recta è diversis partibus puncti β, quod circuli commune habent, sitae: dico, circulos $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ in puncto β extra se contingere. Sit enim centrum unius circuli (circuli ι) punctum ι; centrum alterius (circuli κ) punctum κ; eritque ex hypothesi centrum ι in diametro $\beta\gamma$ *producta* positum, adeoque (Cor. Lemm. B.) extra circulum κ, pariterque centrum κ erit extra circulum ι. Unde simili ratione ac in Lemmate praeced. ex 8, III. demonstratur, rectas ex puncto ι ductas ex utraque puncti β parte ad puncta circuli κ, puncto β quantumvis propinqua, majores esse recta $\iota\beta$, adeoque circuli κ puncta puncto β proxima ex utraque parte τῦ β sita esse extra circulum ι. Eadem prorsus ratione; ductis rectis è centro κ ad puncta circuli ι puncto β quantumvis propinqua, demonstrabitur, circuli ι puncta puncto β proxima ex utraque

 parte

parte $\iota\varkappa$ β sita esse extra circulum $\varkappa$. Circuli itaque ι et $\varkappa$ in puncto β se invicem extra contingunt (Defin. nostr. 3.).

Cor. 1. Generatim itaque, si punctum aliquod commune duorum circulorum, ac utriusque circuli centrum in eadem recta sint, circuli in puncto, quod commune habent, se contingent. Et extra quidem contingent, si punctum commune sit in ipsa recta, quae centra conjungit (Lemm. D): intra vero, si idem sit in recta, quae centra conjungit producta (Lemm. C.)

Cor. 2. Patet ratio describendorum duorum circulorum, qui se invicem extra contingant.

* *Lemm. E.*

Si duo circuli ι, $\varkappa$ punctum aliquod β commune habeant, ac ducatur recta à puncto isto communi ad centrum ι unius circuli (circuli ι), centrum autem $\varkappa$ alterius circuli (circuli $\varkappa$) non sit in hac recta, duo isti circuli in puncto communi se invicem secabunt. Nam centrum ι vel in ipsa peripheria circuli $\varkappa$, vel intra eam, vel extra eam positum erit. Duobus prioribus Casibus, ducta per ι et $\varkappa$ (quae puncta semper diversa erunt. Cor. Lemm. A.) diametro circuli $\varkappa$, patet ex 7, III. rectam quamcunque $\iota\mu$, quae ex ι ad circuli $\varkappa$ punctum aliquod μ puncto β quantumvis propinquum ex ea parte rectae $\iota\beta$, ex qua est $\varkappa$, intra angulum $\varkappa\iota\beta$ ducitur, majorem esse recta $\iota\beta$, adeoque punctum μ esse extra circulum ι; rectam vero quamcunque $\iota\nu$, quae ex ι ad circuli $\varkappa$ punctum aliquod ν puncto β quantumvis propinquum ex ea parte rectae $\iota\beta$, ex qua non est $\varkappa$, intra angulum, qui deinceps est angulo $\varkappa\iota\beta$ ducitur, esse minorem recta $\iota\beta$, adeoque punctum ν esse intra circulum ι; duo itaque circuli ι et $\varkappa$ in puncto β se invicem secant (Def. nost. 1.).

Si

Si vero centrum ι sit extra circulum κ, eadem ratione ex 8, III. demonstrabitur, rectarum, quae è puncto ι ex ea parte rectae ικ, ex qua est punctum β, ad puncta μ, ν, in circulo κ, puncto β quantumvis propinqua, at è diversis puncti β partibus sita, ducuntur, alteram majorem, alteram minorem fore recta ιβ, adeoque punctorum μ, ν alterum extra, alterum intra circulum ι situm esse, ac duos itaque circulos ι et κ in puncto β se invicem secare (Def. nostr. 1.)

Cor. 1. Si duo circuli se invicem intra vel extra in puncto aliquo contingant, recta linea, quae à puncto communi ad centrum unius circuli ducitur, si opus sit, producta, etiam per centrum alterius transibit. Si enim non transeat, circuli in puncto communi se invicem secabunt (Lemm. E), quod fieri nequit (Definit. nostr. 2.). Complectitur hoc Corollar. Pappi Lemma III. et V, quoad partem potissimam. De reliquo vide Coroll. nostr. 3. et 4.

Cor. 2. Si duo circuli se invicem intra vel extra in puncto aliquo contingant, recta linea, quae centra conjungit, si opus sit, producta, etiam per punctum contactus transibit. Si enim neges, ducatur à puncto contactus ad centrum unius circuli recta, in qua ipsa vel producta non sit centrum alterius circuli, atque duo isti circuli in puncto contactus se invicem secabunt (Lemma E.) Q. E. A. (Def. nostr. 2.) Complectitur hoc Corollar. Euclidis 11, III. et 12, III. Corollarium 1. et 2, junctim sumta ita exprimi possunt: Si duo circuli se invicem contingunt, punctum contactus, ac centra utriusque circuli in eadem recta sunt.

Cor. 3. Si duo circuli *extra* se contingunt, centrum uniuscujusque erit in radio, qui in altero circulo

ad

ad contactum ducitur, *ultra contactum producto.* Nam centrum uniuscujusque circuli certe in eadem recta erit, in qua est radius in altero circulo ad contactum ductus (Cor. 1.). Quodsi igitur non sit centrum uniuscujusque in radio alterius *ultra contactum producto*, seu, quod eodem redit, si punctum contactus non sit intermedium inter utrumque circulum, erit punctum contactus in recta, quae centra conjungit, producta. Tum vero circuli se invicem *intra* contingent, (Lemm. C.) quod est contra hypothesin. Hoc Corollar. junctim exprimit Pappi Lemm. III. et Euclid. 12, III.

Cor. 4. Si duo circuli se *intra* contingunt, centrum *unius* circuli erit in *ipso* radio, qui in altero circulo ad contactum ducitur, seu, quod eodem redit, punctum contactus erit in recta, quae centra conjungit, *producta.* Si enim neges, punctum contactus erit in ipsa recta, quae centra conjungit (Cor. 2.). Tum vero circuli se invicem *extra* contingent (Lemm. D.) quod est contra hypothesin. Hoc Corollor. junctim exprimit Pappi Lemm. IV. et Euclidis 11, III.

Cor. 5. Si duo circuli se invicem *intra* contingunt, radius unius minor est radio alterius, Radius nempe unius pars tantum est radii alterius (Cor. 4.). Hinc etiam facile probatur, unius nempe centro superimposito centro alterius, unum circulum, eum videlicet, cujus radius minor est, minorem esse altero. In sequentibus perspicuitatis caussa, si duo circuli se intra contingunt, majorem i. e. eum, qui radium habet majorem, semper intra *contingi*, minorem intra *contingere* dicemus.

Cor. 6. Si duo circuli se invicem contingunt, ac a) punctum contactus (quod ex Cor. 2. semper cum centris

circu-

circulorum in eadem recta est) inter utrumque centrum interjacent, circuli *extra* se contingent. Si enim fieri possit, contingant se intra, eritque punctum contactus in recta, quae centra conjungit *producta* (Cor. 4.). Idem vero ex hypothesi est etiam in *ipsa* recta, quae centra conjungit. Q. E. A. Si vero b) punctum contactus sit in recta, quae centra conjungit, *producta*, circuli *intra* se contingent. Si enim extra contingant, punctum contactus erit in *ipsa* recta, quae centra conjungit (Cor. 3.). Idem vero est etiam in ea *producta*. Q. E. A. Et, quum horum circulorum ille, cujus centrum puncto contactus propius est, radium habeat minorem altero, is continget, alter contingetur. (Cor. 5.)

Fig. 3.

Cor. 7. Si duo circuli $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ extra se contingant, et à puncto contactus β ducatur recta $\delta\epsilon$, quae diametro unius circuli per hoc punctum ductae v. c. diametro $\alpha\beta$ ad rectos angulos insistat, eadem utrumque circulum continget. Quum enim (Cor. 3.) $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ in directum sint, ac ex hypothesi angulus $\alpha\beta\delta$ sit rectus, etiam angulus deinceps $\gamma\beta\delta$ rectus erit (13, I.). Quare recta $\delta\epsilon$ utrumque circulum contingit (Cor. 16, III.). Patet itaque ratio ducendi rectam, quae utrumque duorum circulorum extra se contingentium in puncto contactus communi etiam ipsa contingat. Ac manifestum est, (Cor. 3.) circulos è diversis hujus rectae partibus fore.

Fig. 4.

Cor. 8. Si duo circuli $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ intra se contingant, et à puncto contactus β ducatur recta $\delta\epsilon$, quae diametro unius circuli per hoc punctum ductae, v. c. diametro

$\alpha\beta$ ad rectos angulos insistat, eadem utrumque circulum continget. Quum enim (Cor. 4.) diametri $\alpha\beta, \beta\gamma$ in eadem recta sint, recta $\delta\epsilon$ etiam diametro $\beta\gamma$ ad rectos angulos erit. Contingit igitur utrumque circulum (Cor. 16, III.). Patet itaque ratio ducendi rectam, quae utrumque duorum circulorum intra se contingentium in puncto contactus communi etiam ipsa contingat. Ac manifestum est, (Cor. 4.) circulos esse ex eadem parte rectae contingentis.

* *Lemm. F.*

Fig. 3.

Si recta aliqua $\delta\epsilon$ duos circulos $\alpha\beta, \beta\gamma$ in eodem puncto β contingat, sint autem a) centra circulorum $\iota, \varkappa$ à diversis rectae $\delta\epsilon$ partibus: circuli isti in puncto β se invicem extra contingent. Ductis enim radiis $\iota\beta, \varkappa\beta$, erunt anguli $\iota\beta\delta, \varkappa\beta\delta$ recti (18, III.); quare puncta $\iota, \beta, \varkappa$ in eadem recta erunt (14, I.) et quidem ex hypothesi puncta $\iota, \varkappa$ è diversis partibus puncti β: circuli igitur extra se in puncto β contingunt (Lemm. D.).

Fig. 4.

Si vero b) sint centra circulorum $\iota, \varkappa$ ex eadem parte rectae $\delta\epsilon$: circuli isti in puncto β se invicem intra contingent. Ductis enim radiis $\iota\beta, \varkappa\beta$ erit tam angulus $\iota\beta\delta$, quam angulus $\varkappa\beta\delta$ rectus (18, III.); quare puncta $\iota, \varkappa, \beta$ in eadem recta erunt, et quidem ex hypothesi puncta $\iota, \varkappa$ ex eadem parte puncti β: circuli igitur in puncto β intra se contingent (Lemm. C.).

* *Lemm. G.*

Figg. 3. 4.

Si duo circuli $\iota, \varkappa$ se invicem extra vel intra in puncto aliquo β contingant, nullum aliud punctum commune

mune habere poterunt. Si enim fieri posset, punctum adhuc ϑ ipsis commune, adeoque in utriusque circumferentia positum sit, ac ducatur recta per utrumque centrum, quae igitur, si opus sit, producta etiam per contactum transibit (Cor. 2. Lemm. E.). Atque ex centro ι unius circuli ducatur ad punctum ϑ ex hypothesi in circumferentia alterius circuli positum recta $\iota\vartheta$, eritque necessario $\iota\vartheta$ major aut minor $\iota\beta$ (7, III. vel 8, III.), adeoque punctum ϑ extra vel intra circulum ι situm erit. Idem vero ex hypothesi est etiam in circumferentia circuli ι. Q. E. A.

Lemma hoc, Propositione 13, III. paullo generalius, hanc quoque complectitur, ac simul monstrat, duos circulos, qui se invicem contingunt, non tantum, quod in Definitione 2. continetur, non in puncto contactus, sed etiam alibi nusquam se invicem secare.

Lemm. VII. Ad Probl. XVI. (Lib. VII. Prop. CII.)

Fig. 5.

Sint duo circuli $\alpha\beta\gamma$, $\delta\epsilon\beta$, qui in puncto β (extra) se contingant, ductisque per punctum β rectis quibuscunque $\gamma\beta\delta$, $\alpha\beta\epsilon$ (quae uni circulorum in punctis α, γ, alteri in punctis δ, ϵ iterum occurrant), jungantur rectae $\alpha\gamma$, $\delta\epsilon$: dico, has rectas esse inter se parallelas. Ducatur enim recta $\zeta\eta$, quae utrumque circulum in puncto β contingat (Cor. 7. Lemm. E.). Quoniam igitur $\beta\zeta$ circulum $\alpha\beta\gamma$ tangit, $\beta\alpha$ vero secat, angulus $\alpha\beta\zeta$ aequalis est angulo $\alpha\gamma\beta$ (32, III.). Ex eadem autem ratione angulus $\eta\beta\epsilon$ aequalis est angulo $\beta\delta\epsilon$. Angulus itaque $\alpha\gamma\beta$ aequalis est angulo $\beta\delta\epsilon$ [ob angulos aequales $\alpha\beta\zeta$, $\eta\beta\epsilon$ (15, I.)]. Sunt vero $\alpha\gamma\beta$, $\beta\delta\epsilon$ anguli alterni. Recta igitur $\alpha\gamma$ parallela est rectae $\delta\epsilon$ (27, I.) Q. E. D.

Lemm.

Lemm. VIII. (Libr. VII. Prop. CIII.)

(Conversa 32, III.)

Fig. 6.

Sit circulus $\alpha\beta\gamma$, in quo ducantur rectae (quaecunque) $\alpha\beta, \beta\gamma$, junctaque $\gamma\alpha$, ducatur ex puncto α recta aliqua $\alpha\epsilon$, ita ut angulus $\alpha\beta\gamma$ sit aequalis angulo $\epsilon\alpha\gamma$: dico, rectam $\delta\alpha\epsilon$ contingere circulum in puncto α. Quodsi (primo) recta $\alpha\gamma$ per centrum transeat, manifesta res est. Fit enim angulus $\epsilon\alpha\gamma$ rectus, ob angulum β rectum (32, III.). Tum vero demonstrata est Propositio (Cor. 16, III.). Sin minus, sit centrum ζ, junctaque $\alpha\zeta$ producatur ad punctum η (quo iterum circulo occurrit) et jungatur recta $\beta\eta$. Rectus igitur est angulus $\alpha\beta\eta$ (31, III.). Quoniam igitur angulus $\epsilon\alpha\gamma$ aequalis est (ex hypothesi) angulo $\alpha\beta\gamma$, angulus autem $\eta\alpha\gamma$ in eodem segmento est ac angulus $\eta\beta\gamma$ [adeoque illi aequalis (21, III;)] totus angulus $\epsilon\alpha\eta$ toti $\alpha\beta\eta$, est aequalis. Rectus autem est angulus $\alpha\beta\eta$, proinde etiam angulus $\epsilon\alpha\eta$ rectus est. Recta vero $\alpha\zeta$ per centrum transit. Proinde recta $\delta\epsilon$ circulum $\alpha\beta\gamma$ (in puncto α) contingit. Hoc enim dudum demonstratum est (Cor. 16, III.).

Lemm. IX. (Lib. VII. Prop. CIV.)

Fig. 5.

Quod quum ita sit, conversam prioris (Propositionis, Lemmatis nempe VII) ita demonstrare licet. Nempe, si rectae $\alpha\gamma, \delta\epsilon$ sint parallelae (ductis scilicet per punctum β duobus circulis $\alpha\beta\gamma; \delta\epsilon\beta$ commune, rectis quibuscunque $\gamma\beta\delta, \alpha\beta\epsilon$, quae ex una parte puncti β uni circulorum in punctis α, γ; ex altera vero alteri in punctis δ, ϵ occurrant, junctisque rectis $\alpha\gamma, \delta\epsilon$): dico, circulos $\alpha\gamma\beta, \delta\epsilon\beta$ in puncto β (extra) se contingere. Ducatur

catur iterum recta $\zeta\iota$, quae circulum $\alpha\beta\gamma$ (in β) contingat (Cor. 16, III.). Angulus itaque $\alpha\beta\zeta$ aequalis est angulo γ (32, III.). At angulus $\alpha\beta\zeta$ aequalis est angulo $\iota\beta\eta$ (15, I.): angulus vero γ aequalis est angulo alterno δ (29, I.). (Angulus itaque $\iota\beta\eta$ aequalis est angulo δ.) Proinde per praecedens Lemma recta $\zeta\eta$ contingit circulum $\delta\iota\beta$ (in puncto β). Eadem autem (ex constr.) etiam circulum $\alpha\gamma\beta$ in puncto β contingit. Circulus itaque $\alpha\beta\gamma$ circulum $\delta\beta\iota$ in puncto β contingit (extra, quia rectae $\alpha\gamma$, $\delta\iota$, adeoque circuli $\alpha\gamma\beta$, $\delta\beta\iota$, eorumque centra è diversis partibus puncti β sita sunt). (Lemm. F.)

Lemm. X. (Libr. VII. Prop. CV.)

Problema ad idem (pertinens nempe ad XVI. Apollonii.)

Fig. 7.

Circulo $\alpha\beta\gamma$ positione dato, datisque punctis δ, ι, inflectere ex his punctis rectas $\delta\beta$, $\beta\iota$, easque producere, ita, ut recta $\alpha\gamma$ parallela fiat rectae $\delta\iota$. Puta factum, et ducatur contingens recta $\zeta\alpha$ (Cor. 16, III. et 11, I.). Quoniam igitur $\alpha\gamma$, $\delta\iota$ sunt parallelae, angulus γ aequalis est angulo $\gamma\delta\iota$ (29, I.). At angulus γ aequalis est angulo $\zeta\alpha\iota$, quia $\zeta\alpha$ circulum tangit, $\alpha\iota$ secat (32, III.). Angulus igitur $\zeta\alpha\iota$ aequalis est angulo $\gamma\delta\iota$. Puncta itaque α, β, δ, ζ in eodem circulo sunt (2. Schol. 5, IV.). Proinde rectangulum $\alpha\iota\beta$ aequale est rectangulo $\zeta\iota\delta$ (1. Schol. 36, III.). Datum autem est rectangulum $\alpha\iota\beta$, aequale nempe quadrato contingentis ex ι ductae (36, III.). Datum igitur etiam $\delta\iota\zeta$ rectangulum. Ac data est recta $\delta\iota$: data itaque recta $\iota\zeta$ (61. D.). Eadem vero et positione data est, datumque punctum ι: itaque etiam punctum ζ datum est (30. D.). A dato igitur puncto ζ ducitur recta $\zeta\alpha$ contingens circulum $\alpha\beta\gamma$ positione datum,

 unde

unde $\zeta\alpha$ positione data est ac magnitudine (94. D.). Et, quum punctum ζ datum sit, datum erit punctum α (30.D.). At datum est etiam punctum ι. Recta igitur $\alpha\iota$ positione data est (29. D.). At etiam circulus positione datur. Datum itaque punctum β (28. D.). Et, quum puncta δ, ι data sint, utraque rectarum $\delta\beta$, $\beta\iota$ positione datur. (29. D.)

Componetur vero Problema hac ratione. Sit circulus datus $\alpha\beta\gamma$, et puncta data δ, ι: fiat rectangulum recta $\delta\iota$, et alia quadam $\iota\zeta$ contentum aequale quadrato contingentis ex ι ad circulum ductae (Schol. 16, VI.), atque ex puncto ζ ducatur recta $\zeta\alpha$, circulum $\alpha\beta\gamma$ contingens (17, III.), jungaturque recta $\alpha\iota$, ductaque $\delta\beta$ producatur ad punctum γ, jungaturque $\alpha\gamma$: dico, rectam $\alpha\gamma$ parallelam esse rectae $\delta\iota$. Quoniam enim rectangulum $\zeta\iota\delta$ aequale est quadrato contingentis ex ι ductae (ex constr.), atque etiam rectangulum $\alpha\iota\beta$ aequale est eidem quadrato (36, III.): rectangulum $\alpha\iota\beta$ aequale est rectangulo $\zeta\iota\delta$. Aequalis igitur angulus $\zeta\alpha\iota$ angulo $\beta\delta\iota$ (14, VI. et 6, VI.). Verum angulus $\zeta\alpha\iota$ aequalis est etiam angulo $\alpha\gamma\beta$ in alterno circuli segmento constituto (32, III.). Angulus itaque $\alpha\gamma\beta$ aequalis est angulo $\beta\delta\iota$. Sunt vero anguli alterni. Recta igitur $\alpha\gamma$ parallela est rectae $\delta\iota$ (27, I.).

* Observ. Ita quidem Pappus. Quum vero nec discrimen, quod inter Lemma hoc X, ac sequentia XII, XIII, XIV intercedit, satis aperte indicaverit, nec Determinationem, qua omnino opus habet Problema, attulerit, omnia paullo curatius repetenda visa sunt. Denique quum latissimus hujus Lemmatis apud Apollonium usus sit, calculum quoque subnectendum putavi, quo in sequentibus uti licebit. Praemittenda vero sunt alia quaedam Lemmata,

mata, Determinationi, atque accuratiori Demonſtrationi noſtri hujus inſervientia.

* *Lemma H.*

Fig. 8.

Si in duobus triangulis ABC, DEF baſis unius BC aequalis ſit baſi alterius EF, atque etiam angulus BAC baſi BC oppoſitus aequalis ſit angulo EDF, qui baſi EF opponitur, angulus vero ABC, qui baſi BC adjacet, neque major eſt recto, major ſit angulo DEF, qui baſi EF adjacet: erit etiam latus AC, quod angulo ABC opponitur, majus latere DF, quod angulo DEF opponitur.

Circumſcribatur enim alterutri triangulorum, v. g. triangulo ABC, circulus, (5, IV.) fiatque angulus CBH aequalis angulo DEF (23, I.) jungaturque recta CH. Angulus itaque BHC aequalis eſt angulo BAC (21, III.) i. e. ex hypotheſi angulo EDF. Proinde triangulum HBC aequale eſt triangulo DEF, ac ſpeciatim recta CH aequalis rectae DF (26, I.). Ex centro circuli G ducantur rectae GA, GH, GC, eritque angulus AGC [qui, duobus quippe rectis non major (ita enim 8. Def, I. intelligi ſolet), ſegmento circuli AC inſiſtit non majori quam ſemicirculus (1. Schol. 33, VI.) i. e. eidem ſegmento AC, cui angulus ABC ex hypotheſi recto non major inſiſtit (31, III.)] duplus anguli ABC (20, III.), pariterque angulus HGC duplus anguli HBC i. e. anguli DEF. Eſt vero angulus ABC major angulo DEF; quare et angulus AGC angulo HGC major erit. In triangulis autem AGC, HGC, quum GC ſit communis, ac recta AG aequalis rectae HG, at angulus AGC major angulo HGC, erit recta AC major recta HC (24, I.) i. e. recta DF.

 * Lem-

Lemma J.

Fig. 9.

Si ex puncto aliquo A ductae sint rectae AB, AC contingentes circulum aliquem, atque ex eodem puncto A ad punctum aliquod D, quod sit intra angulum BAC, vel intra eum, qui ipsi est ad verticem, ducatur recta AD; recta haec, si opus sit, producta, circulo in duobus punctis occurret.

Ex centro circuli G ducatur recta AG, ac recta AD cadet vel in ipsam AG, vel non. Si recta AD cadat in ipsam AG, diameter circuli erit in recta AD, si opus sit producta, quae proinde circulum in duobus punctis secabit (17. Def. I.). Sin vero recta AD non cadat in ipsam AG, cadet igitur inter AG et alterutram contingentium v. g. inter AG et AB. Ducatur in AD perpendicularis GH (12, I.), jungaturque GB, quae perpendicularis est ad AB (18, III.). Quoniam igitur AD est inter AG et AB, erit angulus GAH, minor angulo GAB, qui ipse minor est recto (1. Schol. 17, I.). Et quum praeterea in triangulis GAH, GAB sit recta GA communis, atque anguli H et B ipsi oppositi aequales: erit GH minor ipsa GB (Lemma H.) Sumantur in recta AD ex utraque parte puncti H rectae HE, HF ita, ut $HE^2 = HF^2 = GB^2 - GH^2$: dico, puncta E, F esse in circulo. Ducantur enim rectae GE, GF, eritque $GE^2 = EH^2 + GH^2$ (47, I.) $= GB^2$ (ex constr.), adeoque GE = GB (Schol. 48, I.). Eodem modo ostendetur esse GF = GB. Sunt igitur GE, GF radii circuli aeque ac GB.

Fig. 10.

Cor. Contra, si ex punto A ductae sint rectae AB, AC circulum contingentes, atque ex eodem puncto ducatur

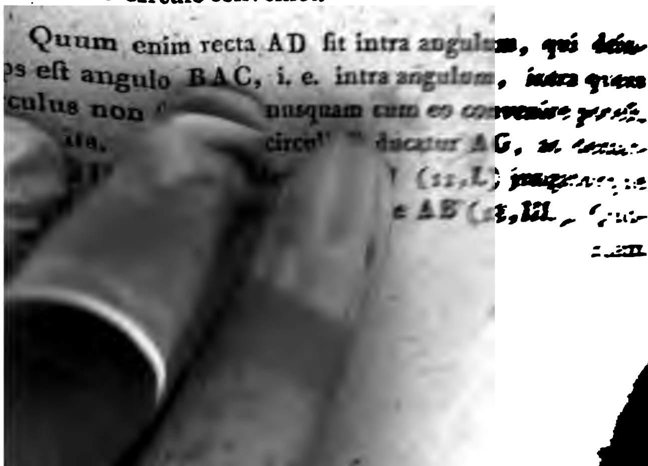
recta

recta aliqua AD, quae circulo non occurrat, erit illa necessario intra angulum, qui deinceps est angulo BAC. Si enim neges, cadet vel in alterutram rectarum AB, AC, vel intra angulum BAC, aut eum, qui ipsi ad verticem est. Si cadat in alterutram rectarum AB, AC, continget circulum. Sin cadat intra angulum BAC, aut eum, qui ipsi ad verticem est, circulo in duobus punctis occurret. Utrumque ex hypothesi fieri nequit. Corollarium hoc adhuc ita enunciari potest: Si AB, AC circulum contingant, AD vero sit tota extra circulum, necessario una tangentium v. g. AB erit inter alteram AC ac rectam AD. Vel etiam ita: Si AB, AC circulum contingant, AD vero sit tota extra circulum, una tangentium v. g. AB circulum et rectam AD, adeoque unumquodvis ejus punctum é diversis partibus, altera AC vero circulum ac rectam AD, adeoque unumquodvis punctum ex eadem parte habebit; vel denique: utraque contingentium erit ex eadem rectae AD parte, ex qua est circulus.

Lemma K.

Fig. 10.

Si ex puncto aliquo A ductae sint rectae AB, AC contingentes circulum aliquem, atque ex eodem puncto A punctum aliquod D, quod sit intra angulum, qui deinceps est angulo BAC, ducatur recta AD, recta haec nusquam cum circulo conveniet.


Quum enim recta AD sit intra angulum, qui deinceps est angulo BAC, i. e. intra angulum, intra quem culus non nusquam cum eo convenire potest.

niam itaque in triangulis GAH, GAB, recta GA communis, atque anguli H, B ipſi oppoſiti aequales ſunt, angulus vero GAH, qui minor eſt recto (1. Schol. 17, I.), major eſt angulo GAB, erit GH major ipſa GB (Lemma H.). Punctum igitur H eſt extra circulum. Pariter vero aliud punctum quodcunque rectae AD, v. c. E extra circulum erit. Ducatur enim recta GE, et quum angulus H rectus ſit, erit GE > GH (1. Schol. 17, I. et 19, I.), et multo magis GE > GB.

Fig. 9.

Cor. Si ex puncto aliquo A ductae ſint rectae AB, AC circulum contingentes, atque ex eodem puncto ducatur recta aliqua AD, quae circulum ipſa, aut producta ſecet; erit illa neceſſario intra angulum BAC, vel intra eum, qui ipſi ad verticem eſt. Si enim neges, cadet recta AD vel in alterutram rectarum AB, AC, adeoque circulum continget, vel intra angulum, qui deinceps eſt angulo BAC, adeoque cum circulo nusquam conveniet, quod utrumque ex hypotheſi fieri nequit. Corollarium hoc ita adhuc enunciari poteſt: Si AB, AC circulum contingant, AD vero ſecet, rectae contingentes erunt è diverſis rectae AD partibus. Vel etiam ita: recta AD, ſi ex ea parte puncti A ducta ſit, ex qua eſt circulus, erit inter ipſas contingentes; ſi vero ex ea parte puncti A ducta ſit, ex qua circulus non eſt, erit inter contingentes productas. Vel denique ita: priore caſu utraque contingentium circulum ac rectam AD, adeoque unum quodvis ejus punctum, ex eadem parte habet, poſteriore vero utraque contingentium circulum ac rectam AD adeoque unum quodvis ejus punctum è diverſis habet partibus.

* *Lemma L.* Figg. 11. 12.

Si recta AB circulum aliquem in puncto B contingat,

gat, atque ex puncto aliquo C posito extra circulum, sed ex eadem rectae AB parte, ex qua est circulus, ducatur ad punctum contactus recta BC; haec recta circulo in alio quodam puncto occurret, quod inter C ac B positum erit. Quodsi vero ex puncto aliquo E posito extra circulum, at ex ea parte rectae AB, ex qua circulus non est, ducatur ad punctum contactus recta EB, haec recta *producta* circulo in alio quodam puncto occurret, ita ut punctum B intermedium sit inter istud punctum, ac punctum E.

Fig. 11.

1. Cas. Si recta CB aut EB per centrum circuli G transit. Hoc casu diameter circuli est in recta CB, vel EB. Diameter vero secat circulum in duobus punctis (17. Def. I.). Hoc itaque casu recta CB vel EB circulo in puncto aliquo D à B diverso occurrit. Quodsi jam sermo sit de recta CB, punctum D erit inter C et B. CB enim ultra B producta cadit in eam rectae AB partem, è qua circulus non est, adeoque CB producta circulo occurrere nequit. Ipsa igitur CB occurrat necesse est. Et, quum punctum C sit extra circulum, punctum D inter C et B positum erit. Sin autem agatur de recta EB, punctum B inter E et D intermedium erit. Ipsa enim EB circulo occurrere nequit, sita quippe ex ea rectae AB parte, è qua circulus non est. *Producta* igitur occurrat necesse est, adeoque punctum B erit inter E et D.

Fig. 12.

2. Cas. Si recta CB aut EB non transit per centrum circuli G. Ducatur ex G ad CB perpendicularis GH (12, I.), fiatque in CB ex ea parte puncti H, ex qua est C, HD = HB: dico, punctum D esse in circulo,

culo, et quidem inter C et B. Ductis enim rectis GD, GB, erit in triangulis GHD, GHB recta GH communis, HD = HB, et anguli recti ad H aequales, adeoque GD = GB (4, I.) i. e. GD erit radius circuli, adeoque punctum D in circulo. Et, quum CB producta ultra B, in eam partem rectae AB cadat, è qua circulus non eſt, ipſa CD circulo occurrat, adeoque punctum D inter C et B intermedium ſit neceſſe eſt. Eodem modo, ſi ad EB ducatur perpendicularis GJ (12, I.), fiatque in recta EB ex ea parte puncti J, ex qua non eſt E, JF = JB, punctum F in circulo eſſe oſtendetur. Et, quum ipſa EB ſit ex ea rectae AB parte, è qua circulus non eſt, *producta* ſaltim circulo occurret, adeoque punctum B erit inter E et F.

Cor. Contra, ſi recta AB circulum aliquem in puncto B contingat, atque ex puncto aliquo C poſito extra circulum ducatur ad punctum contactus recta BC, quae circulo in alio quodam puncto inter C ac B poſito occurrat, punctum C erit ex eadem rectae AB parte, ex qua eſt circulus. Si vero ex puncto, aliquo E poſito extra circulum ducatur ád punctum contactus recta EB, quae producta circulo in alio quodam puncto occurrat, inter quod ac punctum E intermedium ſit punctum B, circulus et punctum E erunt è diverſis rectae AB partibus.

* *Lemma M. (Apud Pappum Lemma X.)*

Figg. 7. 14. 15.

Circulo $\alpha\beta\gamma$ poſitione dato, datisque extra ipſum punctis δ, ε, inflectere ex his punctis ad punctum aliquod β in circulo rectas $\delta\beta$, $\beta\varepsilon$, ita, ut *productae* iterum occurrant circulo in punctis γ, α, junctaque $\alpha\gamma$ parallela ſit ipſi $\delta\varepsilon$.

Ana-

que punctum ζ cadet extra circulum ab ea illius parte, in qua non sunt puncta δ, ι. Ductis igitur ex puncto ζ duabus rectis $\zeta\alpha$, ζA circulum contingentibus (17, III.), utraque earum punctum ι ex eadem parte habebit, ex qua habet circulum (Cor. Lemm. K.), adeoque recta $\iota\alpha$, vel ιA, quae ex Analysi duci debet, circulo in puncto aliquo β, vel B occurret, quod erit inter α et ι, vel inter A et ι (Lemma L.), vel, quod eodem redit, utraque rectarum $\iota\beta$, ιB producta saltim, ut in Problemate fieri jubetur, circulo in alio quodam puncto α vel A occurret. Si vero

b.) recta $\delta\iota$ producta circulum tangat, Problema unam semper Solutionem habebit. Demonstrabitur enim eodem fere modo, quo ante, esse punctum ζ extra circulum ab ea illius parte, in qua non sunt puncta δ, ι. Et, quum $\delta\iota\zeta$ circulum tangat, una rectarum circulum tangentium, quae ex ζ duci possunt (17, III.), v. c. recta ζA, cadet necessario in ipsam $\delta\iota\zeta$ (3. Schol. 36, III.), quare puncta A, B, C coincidunt, et nulla datur recta A C cum ipsa $\delta\iota$ parallela. Quum vero altera tangentium, puta $\zeta\alpha$, circulum $\alpha\beta\gamma$ ac punctum ι ex eadem parte habeat, ducta $\iota\alpha$ circulo in puncto β inter ι et α occurret. (Lemm. L.), vel, quod eodem redit, recta $\iota\beta$ producta saltim circulo in alio puncto α occurret, ut in Problemate postulatur. Denique si

3.) recta $\delta\iota$ tota sit extra circulum, ita, ut neque ipsa, neque producta cum circulo conveniat, Problema unam semper Solutionem habet.

Figg. 7. 15.

Quum enim tota recta $\delta\iota$ etiam producta extra circulum sit, erit etiam punctum ζ, quod in ipsa sumitur, extra circulum, ductisque ex eo duabus rectis $\zeta\alpha$, ζA circulum

culum contingentibus (17, III.), una earum v.g. $\alpha\zeta$ circulum et punctum ι ex eadem parte, altera ζA vero circulum et punctum ι è diversis partibus habebit (Cor. Lemm, I.). Itaque recta quidem $\iota\alpha$ circulo in puncto aliquo β occurret, inter α et ι posito (Lemma L.), vel, quod eodem redit, recta $\iota\beta$ producta saltim, ut in Problemate postulatur, circulo iterum in puncto aliquo α occurret; recta vero ιA non ipsa, sed producta saltim circulo in puncto aliquo B occurret (Lemma L.), vel, quod eodem redit, recta ιB ipsa, non vero, ut in Problemate postulatur, saltim producta circulo iterum in puncto aliquo A occurret.

Compositio.

Figg. 7. 14. 15.

Sit circulus datus $\alpha\beta\gamma$, et puncta data δ, ι extra circulum posita, ita ut recta $\delta\iota$ vel tota, etiam producta, nusquam cum circulo conveniat, vel, si conveniat, puncta tamen δ, ι sint ex eadem parte circuli, sitque hoc ultimo casu ι punctum à circulo remotius, ac ducta ex ι recta circulum contingente (17, III. In delineatione simplicitatis caussa omisimus hanc tangentem) applicetur rectae $\delta\iota$ retangulum $\delta\iota\zeta$ aequale quadrato contingentis ex ι ductae (Schol. 16, VI.), ac sumatur recta $\iota\zeta$ ex ι versus δ: dico, punctum ζ fore extra circulum. Id enim, si $\delta\iota$ etiam producta nusquam cum circulo conveniat, manifestum est. Sin autem $\iota\delta$ producta conveniat cum circulo, demonstrabitur, ut in Determinatione, punctum ζ esse extra circulum, ab ea illius parte, à qua puncta δ, ι non sunt. Ducantur ex punctò ζ rectae $\zeta\alpha$, ζA contingentes circulum in punctis α, A (17, III.), et, si 1.) (Figg. 7. 15.) recta $\delta\iota$ tota, etiam producta, extra circulum

culum cadat, una tangentium v. c. $\zeta\alpha$ circulum et punctum ι ex eadem parte, altera vero circulum et punctum ι è diversis partibus habebit (Cor. Lemm. J.). Ad priorem $\zeta\alpha$ ducatur recta $\iota\alpha$, quae circulo in alio quodam puncto β inter α et ι occurret (Lemma L) et jungatur recta $\delta\beta$: dico, $\delta\beta$ productam circulo iterum in puncto aliquo γ occurrere, ita ut ducta $\alpha\gamma$ parallela sit ipsi $\delta\iota$. Si vero 2.) recta $\delta\iota$ producta cum circulo conveniat (ita nempe, ut puncta δ, ι sint ex eadem parte circuli, sitque ι punctum à circulo remotius,) circulum vel secabit, vel continget. Ac si

Fig. 14.

a.) quidem secet circulum in duobus punctis η, ϑ, utraque tangentium $\zeta\alpha$, ζA circulum et punctum ι ex eadem parte habebit (Cor. Lemm. K.). Ducantur rectae $\iota\alpha$, ιA, quarum prior circulo in puncto aliquo β inter α et ι, altera in puncto aliquo B inter A et ι occurret (Lemm. L.), et jungantur rectae $\delta\beta$, δB: dico, priorem productam circulo iterum in puncto aliquo γ, posteriorem productam iterum in puncto aliquo C occurrere, ita, ut ductae $\alpha\gamma$, AC parallelae sint ipsi $\delta\iota$. Denique si

b.) recta $\delta\iota$ producta tangat circulum, ex tangentibus $\zeta\alpha$, ζA altera, v. c. ζA, cum ipsa $\delta\iota$ coincidet (3. Sch. 36, III.), altera vero $\zeta\alpha$ circulum et punctum ι ex eadem parte habebit, ostendimus quippe, puncta ζ et ι esse è diversis partibus circuli. Ducta igitur recta $\iota\alpha$ circulo in alio quodam puncto β inter α et ι occurret (Lemm. K), jungatur recta $\delta\beta$: dico, $\delta\beta$ productam circulo iterum in puncto aliquo γ occurrere, ita, ut ducta $\alpha\gamma$ parallela sit ipsi $\delta\iota$.

Demonstratio.

Ostendendum est omnibus casibus, rectam $\delta\beta$ productam cum circulo in puncto aliquo γ convenire, ductamque

que $\alpha\gamma$ parallelam esse ipsi $\delta\iota$; eo vero casu, quo $\delta\iota$ producta circulum secat, ostendendum est praeterea, δB productam convenire cum circulo in puncto aliquo C, ductamque AC parallelam esse ipsi $\delta\iota$. Ducatur recta $\beta\iota$ circulum $\alpha\beta\gamma$ in β contingens ex eadem rectae $\alpha\beta$ parte, ex qua est $\alpha\zeta$ (Cor. 16, III. et 11, I.), eritque angulus $\alpha\beta\iota = \beta\alpha\zeta$, uterque enim aequalis est angulo in alterno circuli segmento (32, III.). Est vero ex constructione rectg. $\delta\iota\zeta$ aequale quadrato contingentis ex ι ductae, i.e. aequale rectangulo $\alpha\iota\beta$ (36, III.), adeoque in triangulis $\zeta\alpha\iota$, $\beta\delta\iota$ habemus $\zeta\iota : \alpha\iota = \iota\beta : \iota\delta$ (16, VI.), et, quum praeterea angulus ι sit communis, erit ang. $\zeta\alpha\beta = \beta\delta\iota$ (6, VI.). Est itaque etiam ang. $\alpha\beta\iota = \beta\delta\iota$. Quum vero sit ang. $\alpha\beta\delta = \beta\delta\iota + \beta\iota\delta$ (32, I.), erit semper angulus $\alpha\beta\iota < \alpha\beta\delta$. Recta igitur $\beta\iota$ semper est intra angulum $\alpha\beta\delta$, adeoque puncta δ, ι semper ex eadem parte rectae $\beta\iota$ sita sunt. Atqui punctum ι ac circulus $\alpha\beta\gamma$ è diversis rectae $\beta\iota$ partibus sunt, quod nempe ex ι ducta est recta $\iota\beta$, quae producta circulo iterum occurrit in α (Cor. Lemm. K), itaque etiam punctum δ ac circulus $\alpha\beta\gamma$ erunt è diversis rectae $\beta\iota$ partibus. Recta igitur $\delta\beta$ producta occurret circulo iterum in alio quodam puncto γ (Lemm. L) junctaque $\alpha\gamma$, erit ang. $\zeta\alpha\iota = \alpha\gamma\beta$ (32, III.). At ostendimus, esse ang. $\zeta\alpha\iota = \beta\delta\iota$. Quare ang. $\beta\delta\iota = \alpha\gamma\beta$, adeoque $\alpha\gamma$ parallela ipsi $\delta\iota$ (28, I.).

Eodem modo, si $\iota\delta$ producta circulum secet, ostendetur adhuc, etiam δB productam circulo in alio quodam puncto C occurrere, junctamque AC parallelam esse ipsi $\delta\iota$.

Computatio.

Sit $\varkappa$ centrum circuli dati $\alpha\beta\gamma$, quod proinde datum erit, pariter ac radius $\alpha\varkappa$ (7. Def. D.), et rectae $\iota\varkappa$, $\delta\varkappa$, $\iota\delta$ (29. D.)

(29. D.). Quoniam igitur rectg. $\zeta\iota\delta$ aequale est quadrato contingentis ex ι ad circulum ductae, quae perpendicularis est radio ad punctum contactus ducto, (18, III.), erit quadratum istius contingentis, adeoque rectangulum $\zeta\iota\delta = \kappa\iota^2 - \kappa\alpha^2$ (47, I.), vel $\zeta\iota \times \iota\delta = (\kappa\iota + \kappa\alpha)(\kappa\iota - \kappa\alpha)$ (5, II.), adeoque $\zeta\iota = \frac{(\kappa\iota + \kappa\alpha)(\kappa\iota - \kappa\alpha)}{\iota\delta}$. Habemus porro in triangulis similibus $\zeta\alpha\iota$, $\beta\delta\iota$, $\zeta\alpha : \zeta\iota = \beta\delta : \beta\iota$ (4, VI.), adeoque (15, V), $\zeta\alpha \times \delta\iota : \zeta\iota \times \iota\delta = \beta\delta : \beta\iota$, vel $\zeta\alpha \times \delta\iota : \alpha\iota \times \beta\iota = \beta\delta ; \beta\iota = \alpha\iota \times \beta\delta : \alpha\iota \times \beta\iota$. Itaque $\zeta\alpha \times \delta\iota = \alpha\iota \times \beta\delta$ (14, V.). Est vero (4, VI.) $\beta\delta : \beta\iota = \beta\gamma : \beta\alpha$, vel (12, V.) $\beta\delta : \beta\iota = \delta\gamma : \iota\alpha$, adeoque $\alpha\iota \times \beta\delta = \beta\iota \times \delta\gamma$ (16, VI.). Itaque $(\zeta\alpha \times \delta\iota)^2 = \alpha\iota \times \beta\delta \times \beta\iota \times \delta\gamma = \alpha\iota \times \beta\iota \times \beta\delta \times \delta\gamma = (\kappa\iota^2 - \kappa\alpha^2)(\kappa\delta^2 - \kappa\alpha^2)$; vel

$$\zeta\alpha^2 = \frac{(\kappa\iota^2 - \kappa\alpha^2)(\kappa\delta^2 - \kappa\alpha^2)}{\delta\iota^2}, \text{ et}$$

$$\zeta\alpha = \frac{\sqrt{(\kappa\iota + \kappa\alpha)(\kappa\iota - \kappa\alpha)(\kappa\delta + \kappa\alpha)(\kappa\delta - \kappa\alpha)}}{\iota\delta}.$$

Et, si alia adhuc ζA locum habeat, erit ob $\zeta A = \zeta\alpha$ (2. Schol. 36, III.) idem etiam ipsius ζA valor. Atque haec quidem sufficerent ad determinandum punctum α, vel A. Angulus autem $\alpha\zeta\iota = \delta\beta\iota$ (pariterque, si locum habeat, $A\zeta\iota = \delta B\iota$), cujus frequens usus erit in sequentibus, ita determinabitur. Recta $\zeta\iota$ aut transit per centrum circuli κ, aut non. Si 1.) per centrum transeat, erit $A\zeta\iota = \alpha\zeta\iota = \alpha\zeta\kappa$, adeoque $\alpha\zeta : \alpha\kappa =$ sin. tot.: tang. $\alpha\zeta\iota$, vel (ponimus nempe hic et in sequentibus sinum totum $= 1$): tang. $\left\{\begin{matrix}\alpha\zeta\iota \\ A\zeta\iota\end{matrix}\right\} = \frac{\alpha\kappa}{\alpha\zeta} = \frac{\alpha\kappa \times \iota\delta}{\sqrt{(\kappa\iota + \kappa\alpha)(\kappa\iota - \kappa\alpha)(\kappa\delta + \kappa\alpha)(\kappa\delta - \kappa\alpha)}}$.

Vel, quum hoc casu sit

$$\kappa\zeta = \iota\zeta - \iota\kappa = \frac{(\kappa\iota + \kappa\alpha)(\kappa\iota - \kappa\alpha) - \iota\delta \times \iota\kappa}{\iota\delta}, \text{ ac}$$

$\kappa\zeta : \alpha\kappa =$ sin. tot.: sin. $\alpha\zeta\iota$,

erit sin $\alpha\zeta\iota = \frac{\alpha\kappa \times \iota\delta}{(\kappa\iota + \kappa\alpha)(\kappa\iota - \kappa\alpha) - \iota\delta \times \iota\kappa}$,

pari-

pariterque $\varkappa\zeta : \alpha\zeta =$ sin. tot : cosin. $\alpha\zeta\iota$, adeoque cosin.

$$\alpha\zeta\iota = \frac{\sqrt{(\varkappa\iota + \varkappa\alpha)(\varkappa\iota - \varkappa\alpha)(\varkappa\delta + \varkappa\alpha)(\varkappa\delta - \varkappa\alpha)}}{(\varkappa\iota + \varkappa\alpha)(\varkappa\iota - \varkappa\alpha) - \iota\delta \times \iota\varkappa},$$

vel, quia $\iota\varkappa - \iota\delta = \delta\varkappa$, adeoque

$$\varkappa\zeta = \frac{\varkappa\iota^2 - \varkappa\alpha^2 - \varkappa\iota \times \iota\delta}{\iota\delta} = \frac{\varkappa\iota \times \varkappa\delta - \varkappa\alpha^2}{\iota\delta},$$ erit

$$\text{sin. } \alpha\zeta\iota = \frac{\varkappa\alpha \times \iota\delta}{\varkappa\iota \times \varkappa\delta - \varkappa\alpha^2},$$

et cosin. $$\alpha\zeta\iota = \frac{\sqrt{(\varkappa\iota + \varkappa\alpha)(\varkappa\iota - \varkappa\alpha)(\varkappa\delta + \varkappa\alpha)(\varkappa\delta - \varkappa\alpha)}}{\varkappa\iota \times \varkappa\delta - \varkappa\alpha^2}.$$

Figg. 7. 14.

Si vero 2.) recta $\zeta\iota$ non transeat per centrum, habebit unam contingentium nempe $\zeta\alpha$ ex eadem parte, ex qua est centrum $\varkappa$, alterum vero ζA (si locum habeat) ex ea parte, ex qua non est centrum $\varkappa$ (Cor. Lemm. J vel Cor. Lemm. K.). Quare ang. $\alpha\zeta\iota = \alpha\zeta\varkappa + \varkappa\zeta\iota$, angulus vero $A\zeta\iota = A\zeta\varkappa - \varkappa\zeta\iota = \alpha\zeta\varkappa - \varkappa\zeta\iota$. Ex centro $\varkappa$ demittatur in rectam $\delta\iota$, si opus sit, productam, perpendicularis $\varkappa\lambda$, eritque, ut constat,

$$\varkappa\lambda = \frac{\sqrt{(\iota\varkappa + \delta\varkappa + \iota\delta)(\iota\varkappa + \delta\varkappa - \iota\delta)(\iota\delta + \iota\varkappa - \delta\varkappa)(\iota\delta + \delta\varkappa - \iota\varkappa)}}{2\iota\delta},$$

punctumque λ, in quo $\varkappa\lambda$ ipsi $\delta\iota$ occurrit, cadet vel in ipsum punctum ζ, vel ex ea parte puncti ζ, ex qua est punctum ι, vel in rectam $\iota\zeta$ ultra ζ productam. Eruntque rectae $\delta\varkappa$, $\iota\varkappa$, aequales, vel inaequales. Si sint aequales in triangulo $\varkappa\iota\delta$, uterque angulorum ι, δ acutus erit (3. Schol. 17, I.). Si sint inaequales, sit $\delta\varkappa < \iota\varkappa$, eritque angulus ι acutus (18, I. et 1 Schol. 17, I.). Ac si

a.) puncta λ et ζ coincidant, [quod nempe fiet, si $\iota\zeta = \iota\lambda$, vel si $2\iota\zeta \times \iota\delta = 2\iota\lambda \times \iota\delta$, vel, quia $2\iota\lambda \times \iota\delta = \iota\varkappa^2 + \iota\delta^2 - \delta\varkappa^2$ (13, II.), si $2(\iota\varkappa^2 - \varkappa\alpha^2) = \iota\varkappa^2 + \iota\delta^2 - \delta\varkappa^2$ i. e. si $\iota\varkappa^2 + \delta\varkappa^2 - 2\varkappa\alpha^2 = \iota\delta^2$], erit

erit $\sin \alpha\zeta\iota = \sin(\alpha\zeta\kappa + \kappa\zeta\iota) = \text{cosin}\, \alpha\zeta\kappa = \frac{\alpha\zeta}{\kappa\lambda}$,

vel $\sin \alpha\zeta\iota = 2\sqrt{\frac{(\kappa\iota+\kappa\alpha)(\kappa\iota-\kappa\alpha)(\kappa\delta+\kappa\alpha)(\kappa\delta-\kappa\alpha)}{(\kappa\iota+\kappa\delta+\delta\iota)(\kappa\iota+\kappa\delta-\delta\iota)(\delta\iota+\kappa\iota-\kappa\delta)(\delta\iota+\kappa\delta-\kappa\iota)}}$,

vel $\text{cosin}\, \alpha\zeta\iota = \text{cosin}(\alpha\zeta\kappa + \kappa\zeta\iota) = -\sin \alpha\zeta\kappa = -\frac{\alpha\kappa}{\kappa\lambda}$, vel

$\text{cos.}\, \alpha\zeta\iota = -\frac{2\,\alpha\kappa \times \iota\delta}{\sqrt{(\kappa\iota+\kappa\delta+\delta\iota)(\kappa\iota+\kappa\delta-\delta\iota)(\delta\iota+\kappa\iota-\kappa\delta)(\delta\iota+\kappa\delta-\kappa\iota)}}$,

vel denique

$\text{tang}\, \alpha\zeta\iota = -\frac{\alpha\zeta}{\alpha\kappa} = -\frac{\sqrt{(\kappa\iota+\kappa\alpha)(\kappa\iota-\kappa\alpha)(\kappa\delta+\kappa\alpha)(\kappa\delta-\kappa\alpha)}}{\alpha\kappa \times \iota\delta}$.

Figg. 7. 14.

Si vero b.) punctum λ sit ex eâ parte puncti ζ ex qua est punctum ι (quod nempe fiet, si $\iota\lambda < \iota\zeta$ adeoque $\iota\kappa^2 + \delta\kappa^2 - 2\alpha\kappa^2 > \iota\delta^2$), erit $\lambda\zeta = \iota\zeta - \iota\lambda$, vel $\lambda\zeta = \frac{\iota\kappa^2 + \delta\kappa^2 - (2\,\alpha\kappa^2 + \iota\delta^2)}{2\,\iota\delta}$. Ponatur brevitatis caussa $\kappa\alpha$ radius circuli $= R$; perpendicularis $\kappa\lambda = P$; segmentum $\lambda\zeta = S$; tangens $\zeta\alpha = \zeta A = T$; eritque

$\sin \alpha\zeta\kappa = \frac{\alpha\kappa}{\kappa\zeta} = \frac{R}{\sqrt{(R^2+T^2)}}$; $\text{cos}\, \alpha\zeta\kappa = \frac{\alpha\zeta}{\kappa\zeta} = \frac{T}{\sqrt{(R^2+T^2)}}$;

$\sin \kappa\zeta\iota = \frac{\kappa\lambda}{\kappa\zeta} = \frac{P}{\sqrt{(R^2+T^2)}}$; $\text{cos}\, \kappa\zeta\iota = \frac{\zeta\lambda}{\kappa\zeta} = \frac{S}{\sqrt{(R^2+T^2)}}$,

adeoque

1.) $\sin \alpha\zeta\iota = \sin(\alpha\zeta\kappa + \kappa\zeta\iota) = \frac{RS+PT}{R^2+T^2} = \frac{(PT+SR)(PT-SR)}{(R^2+T^2)(PT-SR)}$

$= \frac{P^2T^2 - S^2R^2}{(R^2+T^2)(PT-SR)}$ vel quia $R^2 + T^2 = \kappa\zeta^2 = P^2 + S^2$, adeoque $S^2 = R^2 + T^2 - P^2$,

erit $\sin \alpha\zeta\iota = \frac{P^2T^2 - (R^2+T^2-P^2)R^2}{(R^2+T^2)(PT-SR)}$

$= \frac{P^2(R^2+T^2) - R^2(R^2+T^2)}{(R^2+T^2)(PT-SR)} = \frac{P^2 - R^2}{PT - SR}$.

2.) Ali-

2.) Aliter ita. Quia sin $\alpha\zeta\iota = \frac{RS + PT}{R^2 + T^2}$, erit etiam sin $\alpha\zeta\iota = \frac{(RS+PT)(PR+ST)}{(R^2+T^2)(PR+ST)}$

$$= \frac{PS.R^2 + RT.P^2 + RT.S^2 + PS.T^2}{(R^2+T^2)(PR+ST)}$$

$$= \frac{PS(R^2+T^2)+RT(P^2+S^2)}{(PR+ST)(R^2+T^2)} = \frac{PS+RT}{PR+ST},$$ vel, quia

$R^2 + T^2 = P^2 + S^2$, adeoque

$(R+T)^2 = (P-S)^2 + 2PS + 2RT$, erit

$$\sin \alpha\zeta\iota = \frac{(R+T)^2-(P-S)^2}{2(PR+ST)} = \frac{(R+T+P-S)(R+T-P+S)}{2(PR+ST)}.$$

Praeterea cof $\alpha\zeta\iota = \cos(\alpha\zeta\kappa + \kappa\zeta\iota) = \frac{ST-PR}{R^2+T^2}$, adeoque

1.) cosin $\alpha\zeta\iota = \frac{(ST-PR)(PT-SR)}{(R^2+T^2)(PT-SR)}$

$$= \frac{PS.T^2 - RT.P^2 - RT.S^2 + PS.R^2}{(R^2+T^2)(PT-SR)}$$

$$= \frac{PS(R^2+T^2)-RT(P^2+S^2)}{(R^2+T^2)(PT-SR)} = \frac{PS-RT}{PT-SR},$$ vel, quia

$R^2 + T^2 = P^2 + S^2$, adeoque

$(T-R)^2 = (P-S)^2 + 2PS - 2RT$, erit

$$\text{cosin } \alpha\zeta\iota = \frac{(T-R)^2-(P-S)^2}{2(PT-SR)} = \frac{(T-R+P-S)(T-R-P+S)}{2(PT-SR)}.$$

2. Aliter ita:

$$\text{Cosin } \alpha\zeta\iota = \frac{(ST-PR)(PR+ST)}{(R^2+T^2)(PR+ST)} = \frac{S^2T^2-P^2R^2}{(R^2+T^2)(PR+ST)}$$

$$= \frac{(R^2+T^2-P^2)T^2-P^2R^2}{(R^2+T^2)(PR+ST)} = \frac{(R^2+T^2)(T^2-P^2)}{(R^2+T^2)(PR+ST)}$$

$$= \frac{T^2 - P^2}{PR + ST}.$$

Ex

Ex his porro deduci possunt sequentia: tang $\alpha\zeta_{\prime} = \frac{\sin \alpha\zeta_{\prime}}{\cos \alpha\zeta_{\prime}}$

$$= 1.) \frac{2(P^2 - R^2)}{(T-R)^2 - (P-S)^2} = \frac{2(P+R)(P-R)}{(T-R+P-S)(T-R-P+S)},$$

vel 2.)

$$\text{tang}\, \alpha\zeta_{\prime} = \frac{(R+T)^2 - (P-S)^2}{2(T^2 - P^2)} = \frac{(R+T+P-S)(R+T-P+S)}{2(T+P)(T-P)}.$$

$$\text{et tang}\, \tfrac{1}{2}\, \alpha\zeta_{\prime} = \frac{1 - \text{cosin}\, \alpha\zeta_{\prime}}{\sin \alpha\zeta_{\prime}}$$

$$= 1.) \frac{PT - SR - PS + RT}{P^2 - R^2} = \frac{(P+R)(T-S)}{(P+R)(P-R)}$$

$$= \frac{T-S}{P-R} = \frac{P+R}{T+S},$$

$$\text{vel 2. tang.}\, \tfrac{1}{2}\, \alpha\zeta_{\prime} = \frac{2PR + 2ST - 2(T^2 - P^2)}{(R+T)^2 - (P-S)^2},$$

vel, quia $R^2 - P^2 = S^2 - T^2$,

adeoque $(R+P)^2 = S^2 - T^2 + 2PR + 2P^2$, vel

$(R+P)^2 = (S-T)^2 + 2PR + 2ST - 2(T^2 - P^2)$, erit

$$\text{tang}\, \tfrac{1}{2}\, \alpha\zeta_{\prime} = \frac{(R+P)^2 - (S-T)^2}{(R+T)^2 - (P-S)^2} = \frac{R+P+S-T}{R+T-P+S}.$$

Et, quum hoc casu fieri possit, ut alius adhuc angulus $A\zeta_{\prime}$ locum habeat, nempe, si $\delta_{\prime}$ producta per circulum transeat i. e. si $P < R$, etiam angulus $A\zeta_{\prime}$ simili modo determinari poterit. Brevius valores, quibus angulus $A\zeta_{\prime}$ determinari potest, ex praecedentibus derivare poterimus, si observemus, angulum $\alpha\zeta_{\prime}$ ex eadem parte rectae $\zeta_{\prime}$ situm esse, ex qua est perpendicularis $\varkappa\lambda$, angulum $A\zeta_{\prime}$ contra situm esse ex parte opposita, adeoque in formulis praecedentibus, siquidem eas angulo $A\zeta_{\prime}$ accommodare velimus, ubique signum rectae $\varkappa\lambda$ i. e. $\gamma\varkappa P$ in contrarium mutari debere.

 Quo

Quo facto erit

$$1.)\ \text{sin}\ A\zeta_{,} = \frac{P^2 - R^2}{-PT - SR} = \frac{R^2 - P^2}{PT + SR}.$$

$$2.)\ \text{sin}\ A\zeta_{,} = \frac{RT - PS}{ST - PR} = \frac{(R+T)^2 - (P+S)^2}{2(ST - PR)}$$

$$= \frac{(R+T+P+S)(R+T-P-S)}{2(ST-PR)}.$$

Pariterque $1.)\ \text{cosin}\ A\zeta_{,} = \frac{-PS - RT}{-PT - SR}$

$$= \frac{PS + RT}{PT + SR} = \frac{(T-R)^2 - (P+S)^2}{2(-PT - SR)}$$

$$= \frac{(P+S)^2 - (T-R)^2}{2(PT + SR)} = \frac{(P+S+T-R)(P+S-T+R)}{2(PT+SR)}.$$

$$2.)\ \text{cosin}\ A\zeta_{,} = \frac{T^2 - P^2}{ST - PR}.$$

Unde $1.)\ \text{tang.}\ A\zeta_{,} = \frac{2(R^2 - P^2)}{(P+S)^2 - (T-R)^2}$

$$= \frac{2(R+P)(R-P)}{(P+S+T-R)(P+S-T+R)},$$

$$2.)\ \text{tang}\ A\zeta_{,} = \frac{(R+T)^2 - (P+S)^2}{2(T^2 - P^2)}$$

$$= \frac{(R+T+P+S)(R+T-P-S)}{2(T+P)(T-P)}.$$

$$\text{et } 1.)\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2} A\zeta_{,} = \frac{T-S}{-P-R} = \frac{S-T}{P+R} = \frac{R-P}{T+S}$$

$$2.\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2} A\zeta_{,} = \frac{(R-P)^2 - (S-T)^2}{(R+T)^2 - (P+S)^2} = \frac{R-P+S-T}{R+T+P+S}.$$

Fig. 15.

Denique si

c.) punctum λ cadat in rectam $\iota\zeta$ ultra ζ productam (quod nempe fiet, si $\iota\lambda > \iota\zeta$, adeoque $\iota x^2 + \delta x^2 - 2\alpha x^2 < \iota\delta^2$), erit $S = \lambda\zeta = \iota\lambda - \iota\zeta = \frac{2\alpha x^2 + \iota\delta^2 - (\iota x^2 + \delta x^2)}{2\iota\delta}$.

Recta igitur S valorem induit negativum ejus, quem ad nr. b. habebat, unde ad determinandum hoc casu angulum $\alpha\zeta\iota$ in formulis, quas ante pro angulo $\alpha\zeta\iota$ habebamus, signum rectae $\lambda\zeta$ i. e. τοῦ S ubique in contrarium mutari debet. Quo facto obtinemus

$$1.)\ \sin \alpha\zeta\iota = \frac{P^2 - R^2}{PT + SR}$$

$$2.\ \sin \alpha\zeta\iota = \frac{RT - PS}{PR - ST} = \frac{(R+T)^2 - (P+S)^2}{2(PR - ST)}$$

$$= \frac{(R+T+P+S)(R+T-P-S)}{2(PR - ST)}$$

Pariterque $1.)\ \cos \alpha\zeta\iota = -\frac{PS + RT}{PT + SR} = \frac{(T-R)^2 - (P+S)^2}{2(PT + SR)}$

$$= \frac{(T-R+P+S)(T-R-P-S)}{2(PT+SR)}$$

$$2.)\ \cos \alpha\zeta\iota = \frac{T^2 - P^2}{PR - ST}$$

Unde $1.)\ \tan \alpha\zeta\iota = \frac{2(P^2 - R^2)}{(T-R)^2 - (P+S)^2}$

$$= \frac{2(P+R)(P-R)}{(T-R+P+S)(T-R-P-S)}$$

$$2.)\ \tan \alpha\zeta\iota = \frac{(R+T)^2 - (P+S)^2}{2(T^2 - P^2)}$$

$$= \frac{(R+T+P+S)(R+T-P-S)}{2(T+P)(T-P)}$$

 et

et 1.) $\text{tang.}\ \frac{1}{2}\,\alpha\zeta\iota = \frac{T+S}{P-R} = \frac{P+R}{T-S}$

2.) $\text{tang.}\ \frac{1}{2}\,\alpha\zeta\iota = \frac{(R+P)^2-(S+T)^2}{(R+T)^2-(S+P)^2} = \frac{R+P-S-T}{R+T-S-P}$.

Caeterum facile patet, neque hoc casu, neque eo, quem nr. a. habuimus, alium adhuc angulum $A\zeta\iota$ locum habere posse.

Angulis autem $\alpha\zeta\iota$, $A\zeta\iota$ quacunque ratione determinatis, rectae $\alpha\iota$, $A\iota$ facile obtinentur, cognitis quippe in triangulis $\alpha\zeta\iota$, $A\zeta\iota$ lateribus $\zeta\iota$, $\alpha\zeta$ vel $A\zeta$ cum angulo incluso, unde infertur

$$\alpha\iota = \sqrt{(\alpha\zeta^2 + \zeta\iota^2 - 2\alpha\zeta \times \zeta\iota \cos \alpha\zeta\iota)},$$

pariterque $A\iota = \sqrt{(A\zeta^2 + \zeta\iota^2 - 2A\zeta \times \zeta\iota \cos A\zeta\iota)}$.

Denique erit $\delta\beta = \frac{\alpha\zeta \times \delta\iota}{\alpha\iota}$; $\iota\beta = \frac{\iota\zeta \times \delta\iota}{\alpha\iota}$

pariterque $\delta B = \frac{A\zeta \times \delta\iota}{A\iota}$ ac $\iota B = \frac{\iota\zeta \times \delta\iota}{A\iota}$. Caeterum Problema, cujus hic Solutionem dedimus, ope rectae $\zeta\iota$ circulum ad alterutrum punctorum α vel γ contingentis, solvi adhuc poterat ope contingentis ad β ductae. Atquae haec secunda Solutio, ut facile ostendi potest, ad Propos. 2. Lib. II. Locorum Planorum Apollonii redit. Nobis hic sufficiet, calculum alteri huic Solutioni accommodatum breviter indicare. Distingui vero debent duo casus, prout nempe $\delta\kappa$, $\iota\kappa$ aequales sint, aut inaequales.

Fig. 15.

Ac 1.) si $\delta\kappa = \iota\kappa$, rectaeque $\delta\kappa$, $\iota\kappa$ occurrant circulo in punctis Δ, d; E; e; erit ob diametros Δd, Ee aequales, etiam $\delta\Delta = \iota E$, et $\delta d = \iota e$, adeoque $\Delta\delta \times \delta d = E\iota \times \iota e$. At $\Delta\delta \times \delta d = \beta\delta \times \delta\gamma$ (1. Schol. 36, III.), pariterque

$E\iota \times \iota e = \beta\iota \times \iota\alpha$. Est igitur $\beta\delta \times \delta\gamma = \beta\iota \times \iota\alpha$, vel $\beta\delta : \beta\iota = \iota\alpha : \delta\gamma$ (16, VI.). At in triangulis aequiangulis $\alpha\beta\gamma$, $\iota\beta\delta$ habemus $\beta\delta : \beta\iota = \beta\gamma : \beta\alpha$ (4, VI.) $= \delta\gamma : \iota\alpha$ (12, V.). Itaque $\iota\alpha : \delta\gamma = \delta\gamma : \iota\alpha$ (11, V.), adeoque $\iota\alpha^2 = \delta\gamma^2$ (16, VI.) et $\iota\alpha = \delta\gamma$ (Schol. 48, I.), unde etiam $\beta\delta = \beta\iota$ (Schol. 14, V.), adeoque in triangulis $\beta\delta\kappa$, $\beta\iota\kappa$ erit angulus $\delta\kappa\beta = \iota\kappa\beta$ (8, I.). Et, quum angulus $\delta\kappa\iota$ necessario sit minor duobus rectis (17, I.) adeoque ang. $\beta\kappa\iota$ minor recto, pariterque uterque angulorum $\kappa\iota\delta$, $\kappa\delta\iota$ acutus sit (3. Schol. 17, I.), rectae $\kappa\beta$, $\iota\delta$ inter se convenient (11. Ax. I.). Conveniant in λ, eritque in triangulis aequalibus $\delta\kappa\lambda$, $\iota\kappa\lambda$ ang. $\delta\lambda\kappa = \iota\lambda\kappa$ (4, I.) = recto (10. Def. I.) et $\delta\lambda = \iota\lambda$ (4, I.). Punctum igitur β hoc casu determinatur, recta $\delta\iota$ in λ bifariam divisa, ductaque recta $\kappa\lambda$, quae circulo in puncto β occurret. Et si iterum sit, ut ante $\kappa\lambda = P = \sqrt{(\iota\kappa^2 - \frac{1}{4}\iota\delta^2)}$; $\kappa\beta = R$, erit $\beta\lambda = P - R$, et $\iota\beta = \delta\beta = \sqrt{[\frac{1}{4}\delta\iota^2 + (P-R)^2]}$, ac tang. $\left\{\begin{matrix}\beta\iota\delta\\ \beta\delta\iota\end{matrix}\right\} = \frac{2(P-R)}{\delta\iota}$. Caeterum quum $\kappa\lambda$ perpendicularis sit ad $\delta\iota$, patet, hoc casu tangentem ad β ductam parallelam esse ipsi $\delta\iota$.

Figg. 7. 14.

Si vero 2.) $\delta\kappa$, $\iota\kappa$ sint inaequales, sit $\delta\kappa < \iota\kappa$, ac ostendetur eadem fere ratione, qua ad nr. 1. usi sumus, fore etiam $\beta\delta < \beta\iota$, adeoque angulum ι minorem angulo δ (18, I.). Ducta autem ad β recta $\iota\beta\mu$ circulum in β contingente, erit ang. $\iota\beta\delta = \gamma\beta\mu$ (15, I.) $= \beta\alpha\gamma$ (32, III.) $= \beta\iota\delta$ (29, I.). Unde angulus $\iota\beta\delta < \beta\delta\iota$, adeoque $\iota\beta\delta + \iota\delta\beta < \beta\delta\iota + \iota\delta\beta$ i. e. $\iota\beta\delta + \iota\delta\beta <$ 2. rectis (13, I.). Recta igitur $\beta\iota$ conveniet cum recta $\iota\delta$ ultra δ producta in puncto aliquo ν (11. Ax. I.). Et quum in triangulis $\nu\beta\delta$, $\nu\iota\beta$ angulus ν sit communis, et angulus $\nu\beta\delta = \nu\iota\beta$, aequiangula erunt triangula (2. Schol. 32, I.) adeoque $\nu\delta : \nu\beta = \nu\beta : \nu\iota$ (4, VI.).

Quum vero sit $\nu\delta\beta = \delta\varepsilon\beta + \beta\delta\varepsilon$ (32, I.) $= \nu\beta\delta + \beta\delta\varepsilon$, adeoque $\nu\beta\varepsilon > \nu\beta\delta$, erit $\nu\beta > \nu\delta$ (18, I.), ac proinde etiam $\nu\varepsilon > \nu\beta$ (Schol. 16, V.). Sumta igitur recta $\nu\pi = \nu\beta$, positaque in recta $\nu\varepsilon$ de ν versus ε, punctum π erit inter puncta δ, ε, ductaque recta $\beta\pi$, erit ang. $\nu\beta\pi = \nu\pi\beta$ (5, I.). Est vero ang. $\nu\beta\pi = \nu\beta\delta + \delta\beta\pi = \delta\varepsilon\pi + \delta\beta\pi$, et angulus $\nu\pi\beta = \delta\varepsilon\pi + \pi\beta\varepsilon$ (32, I.). Ang. itaque $\delta\beta\pi = \pi\beta\varepsilon$, adeoque $\delta\pi : \pi\varepsilon = \delta\beta : \beta\varepsilon$ (3, VI.) $= \beta\gamma : \alpha\beta$ (4, VI.) $= \delta\gamma : \alpha\varepsilon$ (12, V.). Itaque $\delta\pi^2 : \pi\varepsilon^2 = \delta\beta^2 : \beta\varepsilon^2$ (22, VI.) $= (\delta\beta : \beta\varepsilon) + (\delta\beta : \beta\varepsilon)$ (23, VI.) $= (\delta\beta : \beta\varepsilon) + (\delta\gamma : \alpha\varepsilon) = \beta\delta \times \delta\gamma : \beta\varepsilon \times \varepsilon\alpha$ (23, VI.). Ductis autem ex punctis δ, ε ad circulum tangentibus, quarum priorem D, posteriorem E appellabimus, erit $D^2 = \beta\delta \times \delta\gamma$, et $E^2 = \beta\varepsilon \times \varepsilon\alpha$ (36, III.). Unde $\delta\pi^2 : \pi\varepsilon^2 = D^2 : E^2$, adeoque $\delta\pi : \pi\varepsilon = D : E$ (22, VI.), vel $\delta\varepsilon : \pi\varepsilon = D + E : E$, (18, V.), adeoque $\pi\varepsilon = \frac{E \times \delta\varepsilon}{D+E}$,

$$= \frac{\delta\varepsilon\sqrt{\beta\varepsilon \times \varepsilon\alpha}}{\sqrt{\beta\delta \times \delta\gamma} + \sqrt{\beta\varepsilon \times \varepsilon\alpha}} = \frac{\delta\varepsilon\sqrt{(\varepsilon\kappa^2 - \alpha\kappa^2)}}{\sqrt{(\delta\kappa^2 - \alpha\kappa^2)} + \sqrt{(\varepsilon\kappa^2 - \alpha\kappa^2)}}.$$

Pari modo, quum $\pi\varepsilon : \delta\pi = E : D$, adeoque $\delta\varepsilon : \delta\pi = E + D : D$,

$$\text{erit } \delta\pi = \frac{D \times \delta\varepsilon}{D + E} = \frac{\delta\varepsilon\sqrt{\beta\delta \times \delta\gamma}}{\sqrt{\beta\delta \times \delta\gamma} + \sqrt{\beta\varepsilon \times \varepsilon\alpha}}$$

$$= \frac{\delta\varepsilon\sqrt{(\delta\kappa^2 - \alpha\kappa^2)}}{\sqrt{(\delta\kappa^2 - \alpha\kappa^2)} + \sqrt{(\varepsilon\kappa^2 - \alpha\kappa^2)}}.$$

Quum vero sit, ut ostendimus, $\left.\begin{matrix}\nu\beta\\ \nu\pi\end{matrix}\right\} : \nu\varepsilon = \nu\delta : \left\{\begin{matrix}\nu\beta\\ \nu\pi\end{matrix}\right.$, erit etiam $\left.\begin{matrix}\nu\beta\\ \nu\pi\end{matrix}\right\} : \nu\varepsilon = \delta\pi : \pi\varepsilon$ (19, V.) $= D : E$, vel $\nu\varepsilon : \left\{\begin{matrix}\nu\beta\\ \nu\pi\end{matrix}\right. = E : D$ (Cor. 4, V.), adeoque $\pi\varepsilon : \left\{\begin{matrix}\nu\beta\\ \nu\pi\end{matrix}\right. = E - D : D$ (17, V.). At $\delta\varepsilon : \pi\varepsilon = E + D : E$. Itaque $\delta\varepsilon : \left\{\begin{matrix}\nu\beta\\ \nu\pi\end{matrix}\right. = (E+D : E) + (E-D : D) = (E+D)(E-D) : E \times D$ (23, VI.), et

$$\left.\begin{matrix}\nu\beta\\ \nu\pi\end{matrix}\right\} = \frac{E \times D \times \delta\varepsilon}{(E+D)\,(E-D)}$$

$$= \frac{\delta\varepsilon\sqrt{(\varepsilon\kappa^2 - \alpha\kappa^2)(\delta\kappa^2 - \alpha\kappa^2)}}{\varepsilon\kappa^2 - \delta\kappa^2},$$

unde

unde $\delta\nu = \nu\pi - \delta\pi = \frac{D^2 \times \delta\varepsilon}{(E+D)(E-D)} = \frac{\delta\varepsilon(\delta\kappa^2 - \alpha\kappa^2)}{\varepsilon\kappa^2 - \delta\kappa^2}$,

et $\varepsilon\nu = \nu\pi + \varepsilon\pi = \frac{E^2 \times \delta\varepsilon}{(E+D)(E-D)} = \frac{\delta\varepsilon(\varepsilon\kappa^2 - \alpha\kappa^2)}{\varepsilon\kappa^2 - \delta\kappa^2}$.

Determinatis hac ratione puncto ν, ac magnitudine contingentis $\nu\beta$, pariterque, si locum habeat, contingentis νB, anguli $\varepsilon\nu\beta$, $\varepsilon\nu B$ eadem fere ratione determinantur, qua supra pro determinandis angulis $\alpha\zeta\varepsilon$, $A\zeta\varepsilon$ usi sumus. Recta nempe $\delta\varepsilon$ iterum aut transit per centrum circuli, aut non. Ac si 1.) per centrum transeat, erit angulus $\kappa\nu\beta = \kappa\nu B =$ supplemento anguli $\varepsilon\nu\beta$, vel $\varepsilon\nu B$, adeoque

$$\tang \varepsilon\nu\beta = -\tang \kappa\nu\beta = -\frac{\alpha\kappa}{\nu\beta} = -\frac{\alpha\kappa(\varepsilon\kappa^2 - \delta\kappa^2)}{\delta\varepsilon\sqrt{(\varepsilon\kappa^2 - \alpha\kappa^2)(\delta\kappa^2 - \alpha\kappa^2)}},$$

vel, quum hoc casu sit $\kappa\nu = \varepsilon\kappa - \varepsilon\nu$, ac $\kappa\nu : \alpha\kappa =$ sin tot : sin $\varepsilon\nu\beta$,

erit $\sin \varepsilon\nu\beta = \frac{\alpha\kappa}{\varepsilon\kappa - \varepsilon\nu} = \frac{\alpha\kappa(\varepsilon\kappa^2 - \delta\kappa^2)}{\delta\kappa(\varepsilon\kappa^2 - \alpha\kappa^2) - \varepsilon\kappa(\delta\kappa^2 - \alpha\kappa^2)}$

$= \frac{\alpha\kappa(\varepsilon\kappa^2 - \delta\kappa^2)}{\varepsilon\delta(\alpha\kappa^2 + \varepsilon\kappa \cdot \delta\kappa)}$, pariterque cum cosin $\varepsilon\nu\beta = -$ cosin $\kappa\nu\beta$,

et $\kappa\nu : \nu\beta =$ sin tot : cosin $\kappa\nu\beta$; erit cosin $\varepsilon\nu\beta = -\frac{\nu\beta}{\varepsilon\kappa - \varepsilon\nu}$

$$= -\frac{\varepsilon\delta\sqrt{(\varepsilon\kappa^2 - \alpha\kappa^2)(\delta\kappa^2 - \alpha\kappa^2)}}{\delta\kappa(\varepsilon\kappa^2 - \alpha\kappa^2) - \varepsilon\kappa(\delta\kappa^2 - \alpha\kappa^2)} = -\frac{\sqrt{(\varepsilon\kappa^2 - \alpha\kappa^2)(\delta\kappa^2 - \alpha\kappa^2)}}{\alpha\kappa^2 + \varepsilon\kappa \cdot \delta\kappa}.$$

Figg. 7. 14.

Si vero 2.) recta $\delta\varepsilon$ non transeat per centrum, habebit unam contingentium $\beta\nu$ ex eadem parte, ex qua est centrum (Cor. Lemm. J, vel Cor. Lemm. K), atque eo casu, quo altera adhuc νB locum habet, i. e. quo recta $\varepsilon\delta$ producta per circulum transit, erit altera νB ex ea rectae $\delta\varepsilon$ parte, ex qua non est centrum κ (Cor. Lemm. J.).

Sunt vero, ut in Demonstratione ostendimus, puncta δ, ι ac circulus ê diversis rectae $\beta\iota$ partibus, adeoque angulus $\beta\nu\iota = \kappa\nu\iota - \kappa\nu\beta$, (figg. 7, et 14); angulus vero $B\nu\iota = 4\,\text{rect.} - (\kappa\nu\iota + \kappa\nu B) = 4.\,\text{rect.} - (\kappa\nu\iota + \kappa\nu\beta)$. Demissa ex puncto κ recta $\kappa\lambda$ perpendiculari ad $\delta\iota$, punctum λ, in quo occurrit rectae $\delta\iota$, cadet vel in ipsum punctum ν, vel ex ea parte puncti ν, ex qua est punctum ι, vel in rectam $\iota\nu$ ultra ν productam. Ac si a.) puncta λ et ν coincidant, [quod nempe fiet, si $\iota\nu = \iota\lambda$, i. e. si $2\iota\nu \times \iota\delta = 2\iota\lambda \times \iota\delta$ i. e. si $\frac{2(\iota\kappa^2 - \alpha\kappa^2)\iota\delta^2}{\iota\kappa^2 - \delta\kappa^2} = \kappa\iota^2 - \kappa\delta^2 + \iota\delta^2$

i. e. si $(\iota\kappa^2 + \delta\kappa^2 - 2\alpha\kappa^2)\iota\delta^2 = (\iota\kappa^2 - \delta\kappa^2)^2$,] erit sin $\beta\nu\iota$

$$= \sin(\kappa\nu\iota - \kappa\nu\beta) = \operatorname{cosin} \kappa\nu\beta = \frac{\beta\nu}{\kappa\lambda}$$

$$= \frac{2\iota\delta^2\sqrt{(\iota\kappa^2 - \alpha\kappa^2)(\delta\kappa^2 - \alpha\kappa^2)}}{(\iota\kappa^2 - \delta\kappa^2)\sqrt{[(\iota\kappa + \kappa\delta)^2 - \iota\delta^2]\,[\iota\delta^2 - (\iota\kappa - \kappa\delta)^2]}},$$

$$\operatorname{cosin} \beta\nu\iota = \operatorname{cosin}(\kappa\nu\iota - \kappa\nu\beta) = \sin \kappa\nu\beta = \frac{\alpha\kappa}{\kappa\lambda}$$

$$= \frac{2\,\alpha\kappa \times \iota\delta}{\sqrt{[(\iota\kappa + \kappa\delta)^2 - \iota\delta^2]\,[\iota\delta^2 - (\iota\kappa - \kappa\delta)^2]}}.$$

Denique tang $\beta\nu\iota = \frac{\iota\delta\sqrt{(\iota\kappa^2 - \alpha\kappa^2)(\delta\kappa^2 - \alpha\kappa^2)}}{\alpha\kappa(\iota\kappa^2 - \delta\kappa^2)}$.

Si vero

b.) punctum λ sit ex ea parte puncti ν, ex qua est punctum ι [quod fiet, si $\iota\lambda < \iota\nu$, adeoque

$$\kappa\iota^2 - \kappa\delta^2 + \iota\delta^2 < \frac{2(\iota\kappa^2 - \alpha\kappa^2)\iota\delta^2}{\iota\kappa^2 - \delta\kappa^2}$$

i. e. $(\iota\kappa^2 - \delta\kappa^2)^2 < (\iota\kappa^2 + \delta\kappa^2 - 2\alpha\kappa^2)\iota\delta^2$]; erit $\lambda\nu = \iota\nu - \iota\lambda$

$$= \frac{(\iota\kappa^2 - \alpha\kappa^2)\iota\delta}{\iota\kappa^2 - \delta\kappa^2} - \frac{\iota\kappa - \delta\kappa^2 + \iota\delta^2}{2\iota\delta}.$$ Ponatur brevitatis

caus-

caussa $\alpha\varkappa$. radius circuli $= R$; perpendicularis $\varkappa\lambda = P$; segmentum $\lambda\iota = s$; tangens $\beta\iota = t$, atque obtinebimus calculo simili ei, quo supra ad determinandum angulum $\alpha\zeta\iota$ usi sumus; 1.) sin $\beta\iota\iota = \frac{P^2 - R^2}{Pt + Rs}$;

2.) sin $\beta\iota\iota = \frac{Rt - Ps}{PR - st} = \frac{(R+t)^2 - (P+s)}{2(PR - st)}$;

pariterque 1.) cos $\beta\iota\iota = \frac{Rt + Ps}{Pt + Rs} = \frac{(R+t)^2 - (P-s)^2}{2(Pt + Rs)}$;

2.) cosin $\beta\iota\iota = \frac{P^2 - t^2}{PR - st}$.

Unde consequitur 1.) tang $\beta\iota\iota = \frac{2(P - R^2)}{(R+t)^2 - (P-s)^2}$;

2.) tang $\beta\iota\iota = \frac{(R+t)^2 - (P+s)^2}{2(P^2 - t^2)}$;

ac 1.) tang $\frac{1}{2}\beta\iota\iota = \frac{t - s}{P + R} = \frac{P - R}{t + s}$;

2.) tang $\frac{1}{2}\beta\iota\iota = \frac{R - P + s - t}{P + R + s + t}$.

Caeterum patet, casibus quos ad nr. a et b habuimus, nullum alium angulum $B\iota\iota$ locum habere posse. Denique, si

c.) punctum λ cadat in rectam $\iota\iota$ ultra ι productam [quod fiet,

si $\iota\lambda > \iota\iota$, adeoque $\varkappa\iota^2 - \varkappa\delta^2 + \iota\delta^2 > \frac{2(\varkappa\iota^2 - \alpha\varkappa^2)\iota\delta^2}{\varkappa\iota^2 - \varkappa\delta^2}$,

i. e. si $(\varkappa\iota^2 - \varkappa\delta^2)^2 > (\varkappa\iota^2 + \varkappa\delta^2 - 2\alpha\varkappa^2)\iota\delta^2$]; erit $\lambda\iota = \iota\lambda - \iota\iota$

$= \frac{\varkappa\iota^2 - \varkappa\delta^2 + \iota\delta^2}{2\iota\delta} - \frac{(\varkappa\iota^2 - \alpha\varkappa^2)\iota\delta}{\varkappa\iota^2 - \varkappa\delta^2}$. Positisque iterum $\alpha\varkappa = R$; $\varkappa\lambda = P$, $\lambda\iota = s$, $\iota\beta = \iota B = t$, erunt omnia pror-

prorsus uti ante, nisi quod signum τοῦ s in contrarium mutari debet, adeoque

$$1.)\ \sin\beta'' = \frac{P^2-R^2}{Pt-Rs};\quad 2.)\ \sin\beta'' = \frac{Rt+Ps}{PR+st} = \frac{(R+t)^2-(P-s)^2}{2(PR+st)};$$

$$\text{ac } 1.)\ \cos\beta'' = \frac{Rt-Ps}{Pt-Rs} = \frac{(R+t)^2-(P+s)^2}{2(Pt-Rs)};\quad 2.)\ \cos\beta'' = \frac{P^2-t^2}{PR+st};$$

$$\text{unde } 1.)\ \text{tang}\ \beta'' = \frac{2(P^2-R^2)}{(R+t)^2-(P+s)^2};$$

$$2.)\ \text{tang}\ \beta'' = \frac{(R+t)^2-(P-s)^2}{2(P^2-t^2)};$$

$$\text{ac } 1.)\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\beta'' = \frac{t+s}{P+R} = \frac{P-R}{t-s};$$

$$2.)\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\beta'' = \frac{R-P-s-t}{P+R-s+t}.$$

Deinde, quum hoc casu alius adhuc angulus B'' locum habere possit, si nempe sit $R > P$, formulae modo inventae valorem anguli B'' indicabunt, dummodo in illis signum τοῦ P in contrarium mutetur.

Ac determinatis hac ratione in triangulis $\beta'\delta$, $B'\delta$, lateribus β', δ' cum angulo incluso, facile invenietur $\beta\delta$ vel $B\delta$, pariterque è triangulis β'', B'' determinabitur $\beta\varepsilon$, vel $B\varepsilon$.

Observari potest, formulas simplices, quae pro tangentibus angulorum $\frac{1}{2}\beta''$, $\frac{1}{2}B''$ et supra pro tangentibus angulorum $\frac{1}{2}\alpha\zeta'$, $\frac{1}{2}A\zeta'$ obtinentur, etiam ex constructione satis concinne derivari potuisse.

Atque hactenus quidem ipsas rectas $\delta\varepsilon$, $\kappa\varepsilon$, $\kappa\delta$, $\alpha\kappa$ datas esse posuimus. Earum loco alia Data cognita esse possunt, quorum ope novae formulae invenientur. Brevitatis

tatis studio unum saltim ejus rei exemplum afferemus. Recta $\delta\varepsilon$ in χ bifariam divisa, data sit $\delta\chi = \frac{1}{2}\delta\varepsilon$; $\kappa\chi$; $\kappa\varepsilon$ atque angulus $\kappa\chi\delta = \chi$. Atque hic angulus $\kappa\chi\delta$ rectus erit, si sit $\kappa\delta = \kappa\varepsilon$ (5, et 4, I.), quem casum longe facillimum praeterimus. Sin autem sit $\kappa\delta < \varepsilon\delta$, erit angulus $\kappa\chi\delta < \kappa\chi\varepsilon$ (25, I.), i. e. angulus χ erit acutus. (Casum, quo angulus $\kappa\chi\delta$ evanesceret, si puncta κ, δ, ε essent in directum, brevitatis caussa pariter hic praeterimus.) Erit itaque $\kappa\varepsilon^2 = \kappa\chi^2 + \frac{1}{4}\varepsilon\delta^2 + \kappa\chi.\ \varepsilon\delta.\ \text{cosin}\ \chi$, et $\kappa\delta^2 = \kappa\chi^2 + \frac{1}{4}\varepsilon\delta^2 - \kappa\chi.\ \varepsilon\delta.\ \text{cosin}\ \chi$. Substitutis his valoribus in iis, quas vixdum habuimus formulis, erit

$$\delta\nu = \frac{\kappa\chi^2 + \frac{1}{4}\varepsilon\delta^2 - \alpha\kappa^2}{2\,\kappa\chi.\ \text{cosin}\ \chi} - \frac{1}{2}\varepsilon\delta;\quad \varepsilon\nu = \frac{\kappa\chi^2 + \frac{1}{4}\varepsilon\delta^2 - \alpha\kappa^2}{2\,\kappa\chi.\ \text{cosin}\ \chi} + \frac{1}{2}\varepsilon\delta;$$

$$t = \beta\nu = [\sqrt{}(\kappa\chi^2 + \frac{1}{4}\varepsilon\delta^2 - \alpha\kappa^2 + \kappa\chi.\ \varepsilon\delta.\ \text{cosin}\ \chi)$$
$$\times (\kappa\chi^2 + \frac{1}{4}\varepsilon\delta^2 - \alpha\kappa^2 - \kappa\chi.\ \varepsilon\delta.\ \text{cosin}\ \chi)] : 2\,\kappa\chi.\ \text{cosin}\ \chi.$$

Porro $\chi\nu = \delta\nu + \frac{1}{2}\varepsilon\delta = \dfrac{\kappa\chi^2 + \frac{1}{4}\varepsilon\delta^2 - \alpha\kappa^2}{2\,\kappa\chi.\ \text{cosin}\ \chi}$; $\chi\lambda = \kappa\chi.\ \text{cos}\ \chi$.

Unde, si $\kappa\lambda < \chi\nu$, erit $s = \lambda\nu = \chi\nu - \chi\lambda$

$$= \frac{\kappa\chi^2 + \frac{1}{4}\varepsilon\delta^2 - \alpha\kappa^2 - 2\kappa\chi^2.\ \text{cosin}\ \chi^2}{2\,\kappa\chi.\ \text{cosin}\ \chi}$$

vel $s = \dfrac{\frac{1}{4}\varepsilon\delta^2 - \alpha\kappa^2 - \kappa\chi^2.\ \text{cos}\ 2\chi}{2\,\kappa\chi.\ \text{cosin}\ \chi}$. Denique $P = \kappa\chi.\ \text{sin}\ \chi$.

Lemm. XI. Ad. Problema XVII.

(Lib. VII. Prop. CVI.)

Fig. 16.

Sint duo circuli $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\varepsilon\delta$, qui in puncto α (intra) se contingant, ductisque per punctum α rectis quibuscunque $\alpha\delta\beta$, $\alpha\varepsilon\gamma$ (quae uni circulorum in punctis β, γ, alteri in punctis, δ, ε iterum occurrant) jungantur rectae

ctae $\delta\varepsilon$, $\beta\gamma$: dico, has rectas esse inter se parallelas. Ducatur enim recta $\zeta\eta$, quae utrumque circulum in puncto α contingat (8 Cor. Lemm. E.). Aequalis igitur est angulus $\zeta\alpha\beta$ utrivis angulorum $\alpha\gamma\beta$, $\alpha\varepsilon\delta$ (32, III.), adeoque etiam angulus $\alpha\gamma\beta$ aequalis est angulo $\alpha\varepsilon\delta$. Recta igitur $\delta\varepsilon$ parallela est rectae $\beta\gamma$ (27, I.).

Contra vero, si recta $\delta\varepsilon$ parallela est ipsi $\beta\gamma$ (ductis nempe per punctum α, duobus circulis $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\delta\varepsilon$ commune, rectis quibuscunque $\alpha\delta\beta$, $\alpha\varepsilon\gamma$, quae ex eadem puncti α parte uni circulorum in punctis β, γ, alteri vero in punctis δ, ε occurrant, junctisque rectis $\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$): dico, circulos $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\delta\varepsilon$ in puncto α (intra) se contingere. Ducatur enim recta $\zeta\eta$, quae circulum $\alpha\beta\gamma$ in α contingat (Cor. 16, III. et 11, I.). Angulus itaque $\zeta\alpha\delta$ aequalis est angulo γ (32, III.). At angulus γ aequalis est angulo ε (29, I.). Angulus itaque $\zeta\alpha\delta$ aequalis est angulo ε. Proinde recta $\zeta\eta$ contingit circulum $\alpha\delta\varepsilon$: hoc enim ante demonstratum est (Lemm. VIII.). [Et, quum eadem recta $\zeta\eta$ ex constructione contingat etiam circulum $\alpha\beta\gamma$ in eodem puncto α, circuli $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\delta\varepsilon$ in puncto α se contingunt et quidem intra, quia rectae $\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$, adeoque circuli, eorumque centra ex eadem parte puncti α sita sunt (Lemm. F.)]

Lemm. XII. (Libr. VII. Prop. CVII.)

Problema ad idem (pertinens nempe ad XVII. Apollonii.)

Fig. 17.

Circulo $\alpha\beta\gamma$ positione dato, datisque duobus punctis δ, ε, inflectere ex his punctis rectas $\delta\alpha$, $\alpha\varepsilon$, ita, ut recta $\beta\gamma$ parallela sit ipsi $\delta\varepsilon$. Puta factum, et ex puncto β ducatur contingens recta $\beta\zeta$ (Cor. 16, III. et 11, I.).

Quo-

Quoniam igitur $\beta\zeta$ circulum contingit, $\beta\gamma$ vero secat, angulus $\zeta\beta\gamma$ i. e. (29, I.) angulus $\delta\zeta\beta$ aequalis est angulo α (32, III.). In circulo itaque sunt puncta $\alpha, \beta, \epsilon, \zeta$ (2. Schol. 5, IV.). Proinde rectangulum $\alpha\delta\beta$ aequale est rectangulo $\epsilon\delta\zeta$ (1. Schol. 36, III.). Datum autem est rectangulum $\alpha\delta\beta$, aequale nempe quadrato contingentis ex δ ductae (36, III.). Datum igitur etiam rectangulum $\epsilon\delta\zeta$. Ac data est recta $\epsilon\delta$: data itaque etiam recta $\delta\zeta$ (61. D.). Eadem vero et positione data est, datumque punctum δ: itaque etiam punctum ζ datum est (30. D.). A dato itaque puncto ζ ducitur recta $\zeta\beta$ contingens circulum positione datum, unde $\zeta\beta$ positione data est (94. D.). At etiam circulus $\alpha\beta\gamma$ positione datur: itaque punctum β datum est (28. D.). Datum est autem etiam punctum δ. Recta igitur $\beta\delta$ positione data est (29. D.). At etiam circulus positione datur. Datum itaque punctum α (28. D.). Et, quum etiam punctum ϵ datum sit, utraque rectarum $\delta\alpha, \alpha\epsilon$ positione datur (29. D.).

Componetur autem Problema hac ratione. Sit circulus datus $\alpha\beta\gamma$, et puncta data δ, ϵ, fiatque rectangulum $\epsilon\delta\zeta$ aequale quadrato contingentis ex δ ad circulum ductae (Schol. 16, VI.), atque ex puncto ζ ducatur recta $\zeta\beta$ contingens circulum $\alpha\beta\gamma$, junctaque $\delta\beta$ producatur ad α, junganturque rectae $\alpha\epsilon, \beta\gamma$: dico, rectam $\beta\gamma$ parallelam esse ipsi $\delta\epsilon$. Quoniam enim rectangulum $\epsilon\delta\zeta$ aequale est quadrato contingentis ex δ ductae, angulus α i. e. $\gamma\beta\zeta$ (32, III. $\beta\zeta$ enim circulum tangit, $\beta\gamma$ vero secat) aequalis est angulo $\beta\zeta\delta$ (36, III. 14, VI. et 6, VI.). Sunt vero anguli alterni. Recta igitur $\beta\gamma$ parallela est ipsi $\delta\epsilon$ (27, I.).

* Obs. Ita quidem Pappus. Ob easdem vero, quas ad Lemm. X. diximus, caussas, etiam Lemma hoc XII. paullo curatius explicabimus.

Lemm.

* *Lemma N.* (*Apud Pappum Lemma XII.*)

Figg. 7. 13. 15.

Circulo ABC positione dato, datisque extra ipsum punctis δ, ε, inflectere ex his punctis ad punctum aliquod B in circulo rectas δB, Bε, ita, ut *ipsae* (non vero, ut in Lemmate M, saltim productae) iterum occurrant circulo in punctis, C, A, junctaque AC parallela sit ipsi $\delta\varepsilon$.

Analysi

eadem plane uti poterimus, quam pro Lemmate M. dedimus, adhibitis tantum litteris A, B, C pro iis, quas tum habebamus α, β, γ.

Determinatio.

Fig. 13.

Iidem adhuc casus distinguendi sunt, qui in Lemmate M. Nempe 1.) si recta $\delta\varepsilon$ circulo ABC occurrat, sintque puncta δ, ε é diversis circuli partibus, vel secabit circulum, vel continget. Ac, si α.) recta $\delta\varepsilon$ secet circulum in duobus punctis η, ϑ, Problema duas habebit Solutiones. Ostendetur enim, ut in Determinatione ad Lemm. M. allata, rectas εA, $\varepsilon\alpha$ non ipsas, sed productas saltim circulo iterum occurrere in punctis B, β, vel, quod eodem redit, rectas εB, $\varepsilon\beta$ ipsas, ut in Problemate jubetur, circulo in punctis A, α occurrere. Quodsi vero β.) puncta quidem δ, ε sint è diversis circuli partibus, recta autem $\delta\varepsilon$ circulum contingat, Problema unam saltim habebit Solutionem. Nempe è duabus, quae priore casu duci poterant contingentibus ζA, $\zeta\alpha$, altera, v. c. $\zeta\alpha$ jam necessario coincidet cum ipsa recta $\delta\varepsilon\zeta$ (3. Schol. 36, III.), adeoque puncta α, β, γ coincidunt, ac nulla datur recta $\alpha\gamma$ cum ipsa $\delta\varepsilon$ parallela. Quod vero ad alteram

ram ζA attinet, eodem fere modo ac ante oſtenditur, ductam εA productam ſaltim circulo iterum occurrere in puncto aliquo B, vel, quod eodem redit, rectam εB ipſam, ut in Problemate jubetur, cum circulo in puncto aliquo A convenire.

Fig. 14.

Si vero 2.) recta $\delta\varepsilon$ producta circulo ABC occurrat, ita nempe, ut puncta δ, ε ſint ex eadem circuli parte, problema conſtrui nequit. Oſtendetur enim pari ratione, ac in Determinatione Lemmatis M, ſiquidem recta $\delta\varepsilon$ circulum ABC ſecet, utramque rectarum εB, $\varepsilon\beta$, ſi vero $\delta\varepsilon$ circulum tangat, eam ſaltim $\varepsilon\beta$, quae haud coincidit cum ipſa $\delta\varepsilon$, productam tantum circulo iterum occurrere, quum contra in noſtro hoc Problemate exigatur, ut *ipſa* εB inter ε et B, vel *ipſa* $\varepsilon\beta$ inter ε et β circulo iterum occurrat.

Fig. 7. 15.

Denique ſi 3.) recta $\delta\varepsilon$ tota ſit extra circulum, ita, ut neque ipſa, nec producta, cum circulo conveniat, Problema unam ſemper Solutionem habet. Oſtenditur enim iterum, ut in Determinatione Lemmatis M, è duabus rectis $\varepsilon\beta$, εB unam quidem εB ipſam, ut in Problemate poſtulatur, cum circulo iterum in puncto aliquo A convenire, alteram vero $\varepsilon\beta$, contra id, quod in Problemate deſideratur, productam ſaltim circulo iterum occurrere.

C o m p o ſi t i o.

Figg. 7. 13. 15.

Sit circulus datus ABC, et puncta data δ, ε extra circulum poſita, ita, ut recta $\delta\varepsilon$ vel tota, etiam producta nusquam cum circulo conveniat, vel, ſi conveniat, puncta tamen δ, ε ſint è diverſis circuli partibus. Ducta ex

 ε re-

ι recta circulum contingente (17, III.), applicetur rectae $\delta\iota$ rectangulum $\delta\iota\zeta$ aequale quadrato contingentis ex ι ductae (Schol. 16, VI.), positaque recta $\iota\zeta$ de ι versus δ, dico punctum ζ fore extra circulum. Id enim, si $\delta\iota$ etiam producta nusquam cum circulo conveniat, manifestum est. Sin autem $\iota\delta$ ipsa conveniat cum circulo, demonstrabitur, ut nr. 1. Determinationis Lemmatis M, punctum ζ esse extra circulum inter punctum ι ac circulum. Ducantur ex puncto ζ rectae $\zeta\alpha$, ζA contingentes circulum in punctis α, A (17, III.). Et, si 1.) recta $\delta\iota$ tota, etiam producta extra circulum cadat, una tangentium v. c. $\zeta\alpha$ circulum et punctum ι ex eadem parte, altera vero è diversis partibus habebit (Cor. Lemm. J.). Ad posteriorem ζA ducatur recta ιA, quae producta circulo in alio quodam puncto B occurret, ita, ut A intermedium sit inter ι et B (Lemm. L.) et jungatur recta δB : dico, ipsam δB circulo iterum in puncto aliquo C occurrere, ita, ut ducta AC parallela sit ipsi $\delta\iota$.

Fig. 13.

Si vero 2.) ipsa $\delta\iota$ cum circulo conveniat, ita nempe, ut puncta $\delta\iota$ sint è diversis circuli partibus, circulum vel secabit, vel continget. Ac si a.) quidem secet circulum in duobus punctis η, ϑ, utraque contingentium $\zeta\alpha$, ζA circulum et rectam $\zeta\iota$ adeoque circulum et punctum ι è diversis habebit partibus (Cor. Lemm. K.). Ducantur rectae $\iota\alpha$, ιA, quarum prior producta circulo in puncto aliquo β, posterior producta in puncto aliquo B occurret (Lemm. L.), et jungantur rectae $\delta\beta$, δB: dico, priorem circulo iterum in puncto aliquo γ, inter δ et β sito, posteriorem in puncto aliquo C, inter δ et B sito, occurrere, ita, ut ductae $\alpha\gamma$, AC parallelae sint ipsi $\delta\iota$. Denique, si b.) ipsa $\delta\iota$ circulum contingat, ex tan-

tangentibus $\zeta\alpha$, ζA altera, v. c. $\zeta\alpha$ cum ipsa $\delta\varepsilon$ coincidet (3. Schol. 36, III.), altera vero ζA circulum et punctum ε ex diversis partibus habebit, ostendimus quippe, punctum ζ esse inter punctum ε ac circulum. Ducta igitur recta εA producta circulo in alio quodam puncto B occurret (Lemm. L.), jungatur recta δB: dico, ipsam δB circulo in puncto aliquo C, inter δ et B posito, occurrere, ita ut AC, $\delta\varepsilon$ parallelae sint.

Demonstratio.

Ostendendum est omnibus casibus, rectam δB ipsam cum circulo in puncto aliquo C, inter δ et B posito, convenire, ductamque AC parallelam esse ipsi $\delta\varepsilon$; eo vero casu, quo $\delta\varepsilon$ ipsa circulum secat, ostendendum est praeterea, ipsam $\delta\beta$ cum circulo in puncto aliquo γ, inter δ et β posito, convenire, ductamque $\alpha\gamma$ parallelam esse ipsi $\delta\varepsilon$. Ducatur recta BJ circulum ABC in B contingens ex eadem rectae AB parte, ex qua est $A\zeta$ (Cor. 16, III. et 11, I.), eritque angulus $ABJ = BA\zeta$, uterque enim aequalis est angulo in alterno circuli segmento (32, III.). Est vero ex constructione rectg. $\delta\varepsilon\zeta$ aequale quadrato contingentis ex ε ductae, i. e. aequale rectangulo $A\varepsilon B$ (36, III.), adeoque in triangulis $\zeta A\varepsilon$, $B\delta\varepsilon$, $\zeta\varepsilon : A\varepsilon = \varepsilon B : \varepsilon\delta$ (16, VI.), et quum praeterea angulus ε sit communis, erit angulus $A\zeta\varepsilon = \delta B\varepsilon$, et $\zeta A\varepsilon = B\delta\varepsilon$ (6, VI.). Itaque, qui deinceps est angulo $\zeta A\varepsilon$, i. e. angulus $BA\zeta$ adeoque etiam angulus ABJ aequalis est angulo, qui deinceps est ipsi $B\delta\varepsilon$ (13, I.). Angulus vero, qui deinceps est ipsi $B\delta\varepsilon$, aequalis est duobus angulis $AB\delta$ et $A\varepsilon\delta$ simul (32, I. et 13, I.). Quare angulus $ABJ = AB\delta + A\varepsilon\delta$. Itaque semper ang. $ABJ > AB\delta$. Recta igitur BJ semper est extra angulum $AB\delta$, adeoque puncta δ, ε semper ex eadem parte rectae BJ sita sunt.

 At

At etiam punctum ι et circulus ABC ex eadem rectae BJ parte sunt, quod nempe ex ι ducta est recta ιB, quae circulo in puncto aliquo A inter ι et B sito occurrit (Cor. Lemm. L.); itaque etiam punctum δ et circulus ABC sunt ex eadem parte rectae BJ. Ducta igitur δB occurret circulo in alio quodam puncto C inter δ et B posito (Lemm. L.), junctaque AC erit angulus ζAC aequalis angulo $\delta B\iota$ (32, III.). At ostendimus, esse ang. $A\zeta\iota = \delta B\iota$. Quare ang. $A\zeta\iota = \zeta AC$, adeoque AC parallela ipsi $\delta\iota$ (27, I.). Eodem modo, si $\iota\delta$ ipsa circulum secet, ostendetur adhuc, ipsam $\delta\beta$ cum circulo in puncto aliquo γ inter δ et β posito convenire, ductamque $\alpha\gamma$ parallelam esse ipsi $\delta\iota$.

Computatio.

Sit κ centrum circuli dati ABC, eritque, ut in Lemmate M

$$\zeta\iota = \frac{(\kappa\iota + \kappa A)(\kappa\iota - \kappa A)}{\iota\delta},$$ pariterque

$$\zeta A = \frac{\sqrt{(\kappa\iota + \kappa A)(\kappa\iota - \kappa A)(\kappa\delta + \kappa A)(\kappa\delta - \kappa A)}}{\iota\delta},$$ et, si alia

adhuc recta $\zeta\alpha$ locum habeat, erit ob $\zeta\alpha = \zeta A$ (2. Schol. 36, III.) idem etiam ipsius $\zeta\alpha$ valor. Angulus porro $A\zeta\iota = \delta B\iota$ (pariterque, si locum habeat, $\alpha\zeta\iota = \delta\beta\iota$) ita determinabitur. Recta $\zeta\iota$ aut transit per centrum κ aut non. Si 1.) per centrum transeat, erit $A\zeta\iota = \alpha\zeta\iota = 180^\circ - \alpha\zeta\kappa$, adeoque $A\zeta : A\kappa = \sin tot : -\tan \begin{Bmatrix} A\zeta\iota \\ \alpha\zeta\iota \end{Bmatrix}$, vel

$$\tan \begin{Bmatrix} A\zeta\iota \\ \alpha\zeta\iota \end{Bmatrix} = -\frac{A\kappa}{A\zeta}$$

$$= -\frac{A\kappa \times \iota\delta}{\sqrt{(\kappa\iota + \kappa A)(\kappa\iota - \kappa A)(\kappa\delta + \kappa A)(\kappa\delta - \kappa A)}},$$

vel,

vel, quia hoc casu $\varkappa\zeta = \iota\varkappa - \iota\zeta = \frac{\iota\varkappa \times \iota\delta - (\varkappa\iota + \varkappa A)(\varkappa\iota - \varkappa A)}{\iota\delta}$

$= \frac{\iota\varkappa(\iota\delta - \iota\varkappa) + \varkappa A^2}{\iota\delta} = \frac{\iota\varkappa \times \delta\varkappa + \varkappa A^2}{\iota\delta}$,

et $\varkappa\zeta : A\varkappa =$ sin tot : sin $A\zeta\iota$,

erit sin $A\zeta\iota = \frac{A\varkappa \times \iota\delta}{\iota\varkappa \times \delta\varkappa + A\varkappa^2}$,

pariterque ob $\varkappa\zeta : A\zeta =$ sin tot : — cosin $A\zeta\iota$,

erit cosin $A\zeta\iota = -\frac{\sqrt{(\varkappa\iota + \varkappa A)(\varkappa\iota - \varkappa A)(\varkappa\delta + \varkappa A)(\varkappa\delta - \varkappa A)}}{\iota\varkappa \times \delta\varkappa + A\varkappa^2}$.

Si vero 2.) $\zeta\iota$ non transeat per centrum, habebit unam contingentium ζA ex eadem parte, ex qua est centrum $\varkappa$, alteram vero $\zeta\alpha$ (si locum habeat) ex ea parte, ex qua non est centrum $\varkappa$ (Cor. Lemm. J. vel Cor. Lemm. K.). Quare angulus $A\zeta\iota = \varkappa\zeta\iota - \varkappa\zeta A$, angulus vero $\alpha\zeta\iota = 360^\circ - (\varkappa\zeta\iota + \varkappa\zeta A)$. Ex centro $\varkappa$ demittatur in rectam $\delta\iota$, si opus est, productam, perpendicularis $\varkappa\lambda$, eritque

$$\varkappa\lambda = \frac{\sqrt{(\iota\varkappa + \delta\varkappa + \iota\delta)(\iota\varkappa + \delta\varkappa - \iota\delta)(\iota\delta + \iota\varkappa - \delta\varkappa)(\iota\delta + \delta\varkappa - \iota\varkappa)}}{2\,\iota\delta},$$

punctumque λ, in quo $\varkappa\lambda$ ipsi $\delta\iota$ occurrit, cadet vel in ipsum punctum ζ, vel ex ea parte puncti ζ, ex qua est punctum ι, vel in rectam $\iota\zeta$ ultra ζ productam. Ac si

a.) puncta λ et ζ coincidant

(quod fiet, si $\iota\varkappa^2 + \delta\varkappa^2 - 2A\varkappa^2 = \iota\delta^2$),

erit sin $A\zeta\iota =$ sin $(\varkappa\zeta\iota - \varkappa\zeta A) =$ cosin $\varkappa\zeta A = \frac{\zeta A}{\varkappa\lambda}$,

vel sin $A\zeta\iota$

$$= 2\sqrt{\frac{(\varkappa\iota + \varkappa A)(\varkappa\iota - \varkappa A)(\varkappa\delta + \varkappa A)(\varkappa\delta - \varkappa A)}{(\varkappa\iota + \varkappa\delta + \iota\delta)(\varkappa\iota + \varkappa\delta - \iota\delta)(\varkappa\iota + \iota\delta - \varkappa\delta)(\varkappa\delta + \iota\delta - \varkappa\iota)}};$$

cosin

$$\text{cosin } A\zeta\iota = \text{cosin } (\kappa\zeta\iota - \kappa\zeta A) = \text{sin } \kappa\zeta A = \frac{\kappa A}{\kappa\lambda}$$

$$\text{vel cos } A\zeta\iota = \frac{2\,\kappa A \times \iota\delta}{\sqrt{(\kappa\iota+\kappa\delta+\iota\delta)(\kappa\iota+\kappa\delta-\iota\delta)(\kappa\iota+\iota\delta-\kappa\delta)(\kappa\delta+\iota\delta-\kappa\iota)}},$$

$$\text{tang } A\zeta\iota = \frac{\sqrt{(\kappa\iota+\kappa A)(\kappa\iota-\kappa A)(\kappa\delta+\kappa A)(\kappa\delta-\kappa A)}}{\kappa A \times \iota\delta}.$$

Fig. 7.

Si vero

b.) punctum λ sit ex ea parte puncti ζ, ex qua est punctum ι (quod fiet, si $\iota\kappa^2 + \delta\kappa^2 - 2\,A\kappa^2 > \iota\delta^2$),

$$\text{erit } \lambda\zeta = \iota\zeta - \iota\lambda = \frac{\iota\kappa^2 + \delta\kappa^2 - (2A\kappa^2 + \iota\delta^2)}{2\,\iota\delta},$$

positisque, ut in Lemm. M, $\kappa A = R$, $\kappa\lambda = P$, $\lambda\zeta = S$, $\zeta A = T$, erit

1.) $\text{sin } A\zeta\iota = \text{sin } (\kappa\zeta\iota - \kappa\zeta A) = \frac{PT - RS}{R^2 + T^2} = \frac{P^2 - R^2}{PT + SR}$

2.) $\text{sin } A\zeta\iota = \frac{PS - RT}{ST - PR} = \frac{(T - R)^2 - (P - S)^2}{2\,(ST - PR)}$.

Porro

1.) $\text{cos } A\zeta\iota = \text{cos } (\kappa\zeta\iota - \kappa\zeta A) = \frac{ST + PR}{R^2 + T^2} = \frac{PS + RT}{PT + SR}$

$= \frac{(T + R)^2 - (P - S)^2}{2\,(PT + SR)}$

2.) $\text{cosin } A\zeta\iota = \frac{T^2 - P^2}{ST - PR}$. Unde

1.) $\text{tang } A\zeta\iota = \frac{2\,(P^2 - R^2)}{(T+R)^2 - (P-S)^2}$

$= \frac{2\,(P + R)\,(P - R)}{(T + R + P - S)\,(T + R - P + S)}$.

2.) tang

2.) tang $A\zeta_{\iota} = \frac{(T-R)^2 - (P-S)^2}{2(T^2-P^2)}$

$= \frac{(T-R+P-S)(T-R-P+S)}{2(T+P)(T-P)}$

et 1.) tang $\frac{1}{2} A\zeta_{\iota} = \frac{PT+SR-PS-RT}{P^2-R^2}$

$= \frac{(P-R)(T-S)}{(P+R)(P-R)} = \frac{T-S}{P+R} = \frac{P-R}{T+S}$.

2.) tang $\frac{1}{2} A\zeta_{\iota} = \frac{(P-R)^2-(S-T)^2}{(T-R)^2-(P-S)^2} = \frac{P-R+S-T}{T-R-P+S}$.

Caeterum patet, neque hoc casu, neque eo, quem nr. a. habuimus, alium adhuc angulum $\alpha\zeta\iota$ locum habere posse. Denique, si

Fig. 13. 15.

c.) punctum λ cadat in rectam $\iota\zeta$ ultra ζ productam (i. e. si $\iota\kappa^2 + \delta\kappa^2 - 2A\kappa^2 < \iota\delta^2$),

erit $S = \lambda\zeta = \iota\lambda - \iota\zeta = \frac{2A\kappa^2 + \iota\delta^2 - (\iota\kappa^2 + \delta\kappa^2)}{2\iota\delta}$.

Recta igitur S valorem habet negativum ejus, quem ad nr. b. habebat, unde in formulis modo inventis signo $\tau\tilde{s}$ S ubique in contrarium mutato, habebimus jam pro determinando angulo $A\zeta_{\iota}$:

1.) sin $A\zeta_{\iota} = \frac{P^2-R^2}{PT-SR}$; 2.) sin $A\zeta_{\iota} = \frac{PS+RT}{ST+PR}$

$= \frac{(T-R)^2-(P+S)^2}{-2(ST+PR)} = \frac{(P+S)^2-(T-R)^2}{2(ST+PR)}$;

porro 1.) cos. $A\zeta_{\iota} = \frac{RT-PS}{PT-SR} = \frac{(T+R)^2-(P+S)^2}{2(PT-SR)}$;

2.) cosin $A\zeta_{\iota} = \frac{T^2-P^2}{-ST-PR} = \frac{P^2-T^2}{ST+PR}$,

 unde

unde 1.) tang $A\zeta_{\prime} = \frac{2(P^2 - R^2)}{(T+R)^2 - (P+S)^2}$;

2.) tang $A\zeta_{\prime} = \frac{(T-R)^2 - (P+S)^2}{2(T^2 - P^2)}$,

ac 1.) tang $\frac{1}{2} A\zeta_{\prime} = \frac{T+S}{P+R} = \frac{P-R}{T-S}$;

2.) tang $\frac{1}{2} A\zeta_{\prime} = \frac{(P-R)^2 - (-S-T)^2}{(T-R)^2 - (P+S)^2} = \frac{(P-R)^2 - (S+T)^2}{(T-R)^2 - (P+S)^2}$

$= \frac{P-R-S-T}{T-R-P-S} = \frac{R+S+T-P}{R+P+S-T}$.

Et quum hoc casu alius adhuc angulus $\alpha\zeta_{\prime}$ locum habere possit, nempe si recta $\gamma_{\prime}$ circulo occurrat, etiam hunc angulum facile determinabimus, si observemus, angulum $A\zeta_{\prime}$ ex eadem parte rectae $\zeta_{\prime}$ situm esse, ex qua est perpendicularis $\kappa\lambda$, angulum $\alpha\zeta_{\prime}$ contra situm esse ex parte opposita, unde in formulis praecedentibus signum rectae $\kappa\lambda$ i. e. τῆς P semper in contrarium mutari debet. Quo facto erit:

1.) sin $\alpha\zeta_{\prime} = \frac{P^2 - R^2}{-PT - SR} = \frac{R^2 - P^2}{PT + SR}$;

2.) sin $\alpha\zeta_{\prime} = \frac{(T-R)^2 - (S-P)^2}{2(PR - ST)} = \frac{(S-P)^2 - (T-R)^2}{2(ST - PR)}$,

paritérque 1.) cos $\alpha\zeta_{\prime} = \frac{RT + PS}{-PT - SR} = -\frac{RT + PS}{PT + SR}$

$= \frac{(T+R)^2 - (S-P)^2}{-2(PT + SR)} = \frac{(S-P)^2 - (T+R)^2}{2(PT + SR)}$

2.) cosin $\alpha\zeta_{\prime} = \frac{T^2 - P^2}{PR - ST} = \frac{P^2 - T^2}{ST - PR}$,

unde 1.) tang $\alpha\zeta_{\prime} = \frac{2(P^2 - R^2)}{(T+R)^2 - (S-P)^2}$

2.) tang

$$2.)\ \mathrm{tang}\ \alpha\zeta\varepsilon = \frac{(T-R)^2-(S-P)^2}{2(T^2-P^2)}$$

$$\text{et } 1.)\ \mathrm{tang}\ \tfrac{1}{2}\ \alpha\zeta\varepsilon = \frac{T+S}{R-P} = \frac{-P-R}{T-S} = \frac{P+R}{S-T}$$

$$2.)\ \mathrm{tang}\ \tfrac{1}{2}\ \alpha\zeta\varepsilon = \frac{(-P-R)^2-(S+T)^2}{(T-R)^2-(S-P)^2}$$

$$= \frac{(P+R)^2-(S+T)^2}{(T-R)^2-(S-P)^2}$$

$$= \frac{(P+R)^2-(S+T)^2}{(R-T)^2-(S-P)^2} = \frac{P+R+S+T}{R-T+S-P}.$$

Caeterum comparatis inter ſe formulis, quas ad Lemma M pro determinando angulo $\alpha\zeta\varepsilon$, et ad Lemma N pro determinando angulo $A\zeta\varepsilon$ invenimus, patet, priores tranſire in poſteriores, dummodo ſignum τῦ R in contrarium mutetur. Quod ita accidere neceſſe eſt. Quippe $\alpha\varkappa$ radius circuli caſu Lemmatis M intra ipſum angulum $\alpha\zeta\varepsilon$ ſitus eſt, ſeu ex eadem rectae $\alpha\zeta$ parte, ex qua eſt angulus $\alpha\zeta\varepsilon$, contra $A\varkappa$ radius circuli caſu Lemmatis N extra angulum $A\zeta\varepsilon$ ſitus eſt, ſeu ex ea parte rectae $A\zeta$, ex qua non eſt angulus $A\zeta\varepsilon$. Formulae quidem pro ſinu et coſinu anguli $A\zeta\varepsilon$ in noſtro hoc Lemmate N ad nr. 1. inventae primo intuitu non ſecundum hanc regulam ex correſpondentibus in Lemmate M formulis naſci videntur, at ratio ejus rei in eo tantum poſita eſt, quod hoc caſu etiam recta $\varkappa\delta$ in calculum introducta eſt, quae in Lemmate N negativum valorem habet ejus, quem ad Lemma M habuerat, ſita quippe in Lemmate M ex eadem parte puncti $\varkappa$, ex qua eſt ε, in Lemmate N vero ex parte contraria, ut in Determinatione oſtendimus. Formulae denique, quibus in Lemmate M nr. 2. b. ad determinandum angulum $A\zeta\varepsilon$ uſi ſumus, tranſeunt in eas, quas ad

 Lem-

Lemmatis N nr. 2. c. ad determinandum angulum $\alpha\zeta\iota$ invenimus, dummodò in prioribus signum $\tau\tilde{\omega}$ R pariter ac $\tau\tilde{\omega}$ S in contrarium mutetur. Determinato jam angulo $A\zeta\iota$, ac, si locum habeat, etiam angulo $\alpha\zeta\iota$, rectae $A\iota$, $\alpha\iota$, δB, ιB, $\delta\beta$, $\iota\beta$ eodem modo invenientur, quem ad Lemma M indicavimus. Nihil attinet, monere, Problema alio adhuc mòdo, ope rectae BJ vel $\beta\iota$ ad B vel β contingentis, solvi potuisse, simili ratione, ac ad Lemma M ostendimus, formulae enim ad illud Lemma inventae etiam ad Lemma N applicari poterunt, dummodo ubique signum $\tau\tilde{\omega}$ R in contrarium mutetur, ac si praeter angulum $B\iota\iota$ alius adhuc $\beta\iota\iota$ locum habeat, dummodo in formulis pro angulo $B\iota\iota$ ad Lemma N ita inventis, signum adhuc $\tau\tilde{\omega}$ P in contrarium varietur. Denique, si alia Data ponantur, aliae adhuc formulae prodibunt.

Lemm. XIII. (Lib. VII. Prop. CVIII.)

Ad Problema XVIII.

Fig. 18.

Circulo $\alpha\beta\gamma$ positione dato, datisque duobus punctis δ, ι, inflectere ex his punctis rectas $\delta\alpha$, $\alpha\iota$, ita, ut recta $\beta\gamma$ parallela fiat ipsi $\delta\iota$. Puta factum, et ex puncto β ducatur recta $\beta\zeta$ contingens circulum $\alpha\beta\gamma$ (Cor. 16, III. et 11, I.). Aequalis est igitur angulus $\zeta\beta\delta$ angulo γ (32, III.) i. e. angulo ι (29, I.), adeoque in circulo sunt puncta β, ζ, α, ι. - (Hoc Pappi assertum facile ope 5, IV et 21, III. demonstrari potest, eadem ratione, ac 2. Schol. 5, IV ope 5, IV et 22, III.). Proinde rectangulum $\beta\delta\alpha$, aequale est rectangulo $\zeta\delta\iota$ (35, III.). Datum autem est rectangulum $\beta\delta\alpha$, nam ex dato puncto δ ad circulum positione datum ducitur recta $\beta\delta\alpha$ (96. D.). Datum igitur etiam rectangulum $\zeta\delta\iota$. Et data est recta

$\iota\delta$:

$\iota\delta$: data igitur etiam recta $\zeta\delta$ (61. D.) Datum autem est punctum δ: datum itaque etiam punctum ζ (30. D.). A dato igitur puncto ζ ducitur recta $\zeta\beta$ contingens circulum positione datum, unde $\zeta\beta$ positione data est (94. D.). At etiam circulus positione datur: itaque punctum β datum est (28. D.). Datum est autem etiam punctum δ. Recta igitur $\beta\delta$ positione data est (29. D.). At etiam circulus positione datur: itaque et punctum α datum est (28. D.). Et quum utrumque punctorum δ, ι datum sit, utraque rectarum $\delta\alpha$, $\iota\alpha$ positione datur (29. D.).

Componetur autem Problema hac ratione. Sit circulus positione datus $\alpha\beta\gamma$, duo autem puncta data δ, ι et ducatur recta quaecunque $\alpha\delta\beta$, fiatque rectangulum $\iota\delta\zeta$ aequale rectangulo $\alpha\delta\beta$ (Schol. 16, VI.) id est (verborum paullo obscuriorum illustrationem vide in nova, quam statim dabimus, Lemmatis hujus Tractatione) ducatur recta $\beta\zeta$ circulum contingens (17, III.) ac jungatur recta $\gamma\iota\alpha$. Quoniam igitur aequalis est angulus $\zeta\beta\delta$ angulo $\delta\iota\alpha$ [puncta enim α, β, ι, ζ sunt in circulo (quae propositio ut conversa 35, III. facile demonstrari potest)], angulus vero $\zeta\beta\delta$ etiam aequalis est angulo γ (32, III. $\beta\zeta$ enim circulum tangit, $\beta\alpha$ vero secat): angulus itaque γ aequalis est angulo ι. Recta igitur $\beta\gamma$ parallela est ipsi $\delta\iota$ (28, I.). Q. E. D.

* *Lemma O. (Apud Pappum Lemma XIII.)*

Fig. 19.

Circulo $\alpha\beta\gamma$ positione dato, datisque intra ipsum punctis δ, ι: inflectere ex his punctis ad punctum aliquod β in circulo, quod sit ex determinata aliqua rectae $\delta\iota$ parte, v. g. infra $\delta\iota$, rectas $\delta\beta$, $\beta\iota$, ita, ut circulo iterum

rum occurrant in punctis γ, α, junctaque $\alpha\gamma$ parallela sit ipsi $\delta\epsilon$. (Nempe, si centrum circuli $\alpha\beta\gamma$ sit in recta $\delta\epsilon$ vel ipsa, vel producta, unam hujus rectae partem pro lubitu partem inferiorem, alteram partem superiorem appellabimus. Sin autem centrum circuli non sit in recta $\delta\epsilon$, eam partem rectae $\delta\epsilon$, ex qua est centrum, partem superiorem, alteram vero, ex qua non est centrum, inferiorem vocabimus.)

Analysis.

Puta factum, et ducatur contingens recta $\zeta\alpha$ (Cor. 16, III et 11, I.), eritque ob $\alpha\gamma$, $\delta\epsilon$ parallelas, ang. $\gamma = \epsilon\delta\beta$ (29, I.). At ang. $\gamma = \zeta\alpha\epsilon$ (32, III.). Itaque ang. $\epsilon\delta\beta = \zeta\alpha\epsilon$. Est vero etiam ang. $\delta\epsilon\beta = \alpha\epsilon\zeta$ (15, I.), ideoque, quum $\epsilon\delta\beta + \delta\epsilon\beta <$ 2. rectis (17, I.), etiam $\zeta\alpha\epsilon + \alpha\epsilon\zeta <$ 2. rectis. Rectae igitur $\zeta\alpha$, $\delta\epsilon$ inter se convenient (11. Ax. I.). Conveniant in ζ, eritque in triangulis aequiangulis $\alpha\epsilon\zeta$, $\delta\epsilon\beta$; $\alpha\epsilon : \zeta\epsilon = \epsilon\delta : \epsilon\beta$ (4, VI.), adeoque rectang. $\alpha\epsilon\beta$ = rectg. $\zeta\epsilon\delta$ (16, VI.) Unde, ut apud Pappum demonstratur, punctum ζ datum, rectasque $\zeta\alpha$, $\alpha\epsilon\beta$ positione datas, ac proinde punctum β datum, rectamque $\beta\delta\gamma$ positione datam esse.

Compositio.

Sit circulus datus $\alpha\beta\gamma$, et puncta data δ, ϵ intra circulum posita, ductaque ex ϵ recta quacunque $\eta\epsilon\vartheta$, quae circulo in punctis η, ϑ occurrat, applicetur rectae $\delta\epsilon$ rectangulum $\delta\epsilon\zeta$ aequale rectangulo $\eta\epsilon\vartheta$ (Schol. 16, VI.), positaque recta $\epsilon\zeta$ ex ea parte puncti ϵ, ex qua non est punctum, δ, dico, punctum ζ fore extra circulum. Occurrat enim recta $\epsilon\delta$ circulo in punctis ι, μ, ita, ut punctum μ puncto δ, punctum vero ι puncto ϵ adjaceat, eritque rectg. $\iota\epsilon\mu$ = rectg. $\eta\epsilon\vartheta$ (35, III.) = rectg. $\delta\epsilon\zeta$,

adeo-

adeoque $\mu\iota : \iota\zeta = \iota\delta : \iota\iota$ (16, VI.). Et, quum ex hypothesi $\mu\iota > \iota\delta$, erit $\iota\zeta > \iota\iota$ (14, V.), adeoque punctum ζ cadet extra circulum. Ducantur ex puncto ζ rectae $\zeta\alpha$, ζA contingentes circulum in punctis α, A (17, III.), quae erunt è diversis rectae $\delta\iota$ partibus (Cor. Lemm. K.). Ad eam contingentium, quae est supra $\iota\delta$ v. g. $\zeta\alpha$ ducatur recta $\iota\alpha$, et producatur ex altera parte rectae $\delta\iota$, usquedum occurrat circulo in β, ductaque $\delta\beta$ producatur, usquedum iterum occurrat circulo in γ, dico, ductam $\alpha\gamma$ parallelam esse ipsi $\delta\iota$.

Demonstratio.

Quippe rectang. $\alpha\iota\beta$ = rectg. $\eta\iota\vartheta$ (35, III.) = rectg. $\delta\iota\zeta$, adeoque $\alpha\iota : \iota\zeta = \iota\delta : \iota\beta$ (16, VI.). Itaque angul. $\zeta\alpha\iota$ = ang. $\iota\delta\beta$ (6, VI.). At ang. $\zeta\alpha\iota$ = ang. γ (32, III.). Itaque ang. γ = ang. $\iota\delta\beta$, adeoque $\alpha\gamma$ parallela est ipsi $\iota\delta$ (28, I.).

Computatio.

Ducatur per centrum $\varkappa$ recta $\varkappa\iota$, quae circulo occurrat in punctis ξ, ν, eritque rectgang. $\zeta\iota\delta$ = rectgang. $\eta\iota\vartheta$ = rectangul. $\xi\iota\nu$ = $\varkappa\nu^2 - \varkappa\iota^2$ (5, II.) = $\alpha\varkappa^2 - \varkappa\iota^2$.
Itaque $\zeta\iota = \frac{\alpha\varkappa^2 - \varkappa\iota^2}{\iota\delta} = \frac{(\alpha\varkappa + \varkappa\iota)(\alpha\varkappa - \varkappa\iota)}{\iota\delta}$,

vel, si puncta $\varkappa$, ι coincidant, erit $\zeta\iota = \frac{\alpha\varkappa^2}{\iota\delta}$. Habemus porro in triangulis similibus $\zeta\alpha\iota$, $\beta\delta\iota$, $\zeta\alpha : \alpha\iota = \beta\delta : \delta\iota$, adeoque $\zeta\alpha \times \delta\iota = \alpha\iota \times \beta\delta$ (16, VI.). Est vero $\beta\delta : \delta\gamma = \beta\iota : \iota\alpha$ (2, VI.), adeoque $\alpha\iota \times \beta\delta = \beta\iota \times \delta\gamma$ (16, VI.). Itaque $(\zeta\alpha \times \delta\iota)^2 = \alpha\iota \times \beta\iota \times \beta\delta \times \delta\gamma$.
At rectangulum $\alpha\iota \times \iota\beta = \eta\iota \times \iota\vartheta = \alpha\varkappa^2 - \varkappa\iota^2$, pariterque rectangul. $\beta\delta \times \delta\gamma = \alpha\varkappa^2 - \varkappa\delta^2$.

Itaque

Itaque $(\zeta\alpha \times \delta\iota)^2 = (\alpha\varkappa^2 - \varkappa\iota^2)(\alpha\varkappa^2 - \varkappa\delta^2)$, adeoque $\zeta\alpha = \frac{\sqrt{(\alpha\varkappa + \varkappa\iota)(\alpha\varkappa - \varkappa\iota)(\alpha\varkappa + \varkappa\delta)(\alpha\varkappa - \varkappa\delta)}}{\iota\delta}$, vel, si puncta $\varkappa$ et ι coincidant, erit $\zeta\alpha = \frac{\alpha\varkappa\sqrt{(\alpha\varkappa + \varkappa\delta)(\alpha\varkappa - \varkappa\delta)}}{\iota\delta}$, si contra puncta $\varkappa$ et δ coincidant, erit $\zeta\alpha = \frac{\alpha\varkappa\sqrt{(\alpha\varkappa + \varkappa\iota)(\alpha\varkappa - \varkappa\iota)}}{\iota\delta}$.

Angulus porro $\alpha\zeta\iota = \delta\beta\iota$ ita determinari potest. Recta $\zeta\iota$ aut transit per centrum circuli $\varkappa$, aut non. Si

1.) per centrum transeat, erit $\alpha\zeta\iota = \alpha\zeta\varkappa$, adeoque $\alpha\zeta : \alpha\varkappa =$ sin. tot. : tang $\alpha\zeta\iota$, vel tang $\alpha\zeta\iota = \frac{\alpha\varkappa}{\alpha\zeta} = \frac{\alpha\varkappa \times \iota\delta}{\sqrt{(\alpha\varkappa + \iota\varkappa)(\alpha\varkappa - \iota\varkappa)(\alpha\varkappa + \delta\varkappa)(\alpha\varkappa - \delta\varkappa)}}$.
Eruntque puncta, ι, δ vel ex eadem parte centri $\varkappa$, vel non. Si sint ex eadem parte centri, sit ι punctum à centro remotius, δ vero punctum centro propius, atque erit $\varkappa\zeta = \iota\zeta + \iota\varkappa$, pariterque si puncta ι, δ sint è diversis puncti $\varkappa$ partibus, erit: $\varkappa\zeta = \iota\zeta + \iota\varkappa$, adeoque utroque casu sin $\alpha\zeta\iota = \frac{\alpha\varkappa . \iota\delta}{(\alpha\varkappa + \iota\varkappa)(\alpha\varkappa - \iota\varkappa) + \iota\varkappa . \iota\delta}$
vel, quia tum $\iota\delta - \iota\varkappa = \varkappa\delta$, erit sin $\alpha\zeta\iota = \frac{\alpha\varkappa \times \iota\delta}{\alpha\varkappa^2 + \iota\varkappa . \varkappa\delta}$,
pariterque cos $\alpha\zeta\iota = \frac{\sqrt{(\alpha\varkappa + \varkappa\iota)(\alpha\varkappa - \varkappa\iota)(\alpha\varkappa + \varkappa\delta)(\alpha\varkappa - \varkappa\delta)}}{(\alpha\varkappa + \iota\varkappa)(\alpha\varkappa - \iota\varkappa) + \iota\varkappa . \iota\delta}$
$= \frac{\sqrt{(\alpha\varkappa + \varkappa\iota)(\alpha\varkappa - \varkappa\iota)(\alpha\varkappa + \varkappa\delta)(\alpha\varkappa - \varkappa\delta)}}{\alpha\varkappa^2 + \iota\varkappa . \varkappa\delta}$.

Si puncta ι et $\varkappa$ coincidant, erit sin $\alpha\zeta\iota = \frac{\iota\delta}{\alpha\varkappa}$,
et cosin $\alpha\zeta\iota = \frac{\sqrt{(\alpha\varkappa + \varkappa\delta)(\alpha\varkappa - \varkappa\delta)}}{\alpha\varkappa}$;
si vero puncta δ et $\varkappa$ coincidant, erit sin $\alpha\zeta\iota = \frac{\iota\delta}{\alpha\varkappa}$,
et cosin $\alpha\zeta\iota = \frac{\sqrt{(\alpha\varkappa + \iota\varkappa)(\alpha\varkappa - \iota\varkappa)}}{\alpha\varkappa}$.

Si

Si verò 2.) recta $\zeta\iota$ non transeat per centrum, erit ang. $\alpha\zeta\iota = \alpha\zeta\varkappa \mp \varkappa\zeta\iota$. Atque puncta ι, δ vel aequaliter à centro distabunt, vel non. Si aequaliter distent à centro, in triangulo $\varkappa\iota\delta$ angulus ι erit acutus (3. Schol. 17, I.); si non, erit adhuc angulus ι acutus (18, I. et 1. Schol. 17, I.). Demissoque ex $\varkappa$ in rectam $\iota\delta$, si opus sit, productam, perpendiculo $\varkappa\lambda$, erit:

$$\varkappa\lambda = \frac{\sqrt{(\iota\varkappa+\delta\varkappa+\iota\delta)(\iota\varkappa+\delta\varkappa-\iota\delta)(\iota\varkappa+\iota\delta-\delta\varkappa)(\delta\varkappa+\iota\delta-\iota\varkappa)}}{2\,\iota\delta},$$

punctumque λ cadet vel in ipsum punctum ι, vel in rectam $\zeta\iota$ ultra ι productam. Utroque casu poni potest

$$\lambda\zeta = \iota\zeta + \iota\lambda = \frac{2\,\alpha\varkappa^2 + \iota\delta^2 - (\iota\varkappa^2 + \delta\varkappa^2)}{2\,\iota\delta}.$$

Quo facto, si iterum appellemus $\alpha\varkappa = R$, $\varkappa\lambda = P$, $\lambda\zeta = S$, $\alpha\zeta = T$ calculum obtinebimus eundem prorsus ac ad Lemm. M. nr. 2. b. pro angulo $\alpha\zeta\iota$ habuimus.

Lemm. XIV. (Lib. VII. Prop. CIX.)
Ad. Problema XIX.

Fig. 20.

Circulo $\alpha\beta\gamma$ positione dato, datisque duobus punctis δ, ι, inflectere ex his punctis rectas $\delta\alpha$, $\alpha\iota$, ita, ut $\beta\gamma$ parallela fiat ipsi $\delta\iota$. Puta factum, et ducatur contingens $\beta\zeta$ (Cor. 16, III. et 11, I.). Erunt igitur iterum in circulo puncta $\alpha, \zeta, \beta, \iota$, et rectangulum $\alpha\delta\beta$ aequale rectangulo $\iota\delta\zeta$ (35, III.). Datum autem est rectangulum $\alpha\delta\beta$ (96. D.). Datum itaque etiam rectg. $\iota\delta\zeta$. At data est recta $\delta\iota$: data igitur recta $\zeta\delta$ (61. D.). Verum et positione data est, datumque punctum δ: datum itaque etiam punctum ζ (30. D.), adeoque $\beta\zeta$ positione data (94. D.). Verum et circulus datus est: datum igitur punctum β (28. D.). At etiam puncta δ, ι: itaque utra-

que

que rectarum $\delta\alpha$, $\alpha\iota$ data eſt. Demonſtrantur enim haec ſimili ratione ac ante, et Compoſitio ſimilis eſt ei, quam pro praecedente Lemmate dedimus.

** Lemma P. (Apud Pappum Lemma XIV.)*

Fig. 19.

Circulo ABC poſitione dato, datisque intra ipſum punctis δ, ε, inflectere ex his punctis ad punctum aliquod B in circulo, quod ſit ſupra $\delta\varepsilon$, rectas δB, Bε, ita ut circulo iterum occurrant in punctis C, A, junctaque AC parallela ſit ipſi $\delta\varepsilon$. Analyſis ac Compoſitio eædem prorſus ſunt, ac in Lemmate O, ſi modo loco litterarum α, β, γ ſcribas A, B, C, atque è contingentibus $\zeta\alpha$, ζA eligas eam ζA, quae eſt infra $\delta\varepsilon$. Ac, ſi recta $\zeta\iota$ per centrum tranſeat, Computatio etiam eadem prorſus eſt ac in Lemmate O; ſi non tranſeat per centrum, determinantur rectae P, S, T uti ante, tum vero, quod recta $\kappa\lambda$ ſitum jam habet contrarium ei, quem in Lemmate O habuerat, in formulis Lemmatis O ſignum $\tau\tilde{\varepsilon}$P in contrarium mutari debet, adeoque formulae Lemmatis hujus P jam eædem prorſus evadunt ac eæ, quibus in Lemmate M nr. 2. b. angulum A$\zeta\iota$ determinavimus.

Lemm. XV. (Libr. VII. Prop. CX.)

Ad Probl. XXIV.

Fig. 21.

Si duo circuli $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ in puncto β ſe contingant, et capiantur centra eorum δ, ε, et jungantur rectae $\alpha\delta$, $\delta\beta$, $\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\beta$, ſit vero recta $\alpha\delta$ parallela ipſi $\gamma\varepsilon$: dico, $\delta\beta\varepsilon$, $\alpha\beta\gamma$ rectas eſſe. Ducatur enim recta $\zeta\eta$, utrumque circulum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ (in puncto β) contingens (7. Cor. Lem. E.). Quoniam igitur ex centro ducta eſt recta $\delta\beta$, angulus $\delta\beta\zeta$

rectus

rectus est (18, III.), atque eandem ob caussam etiam angulus $\zeta\beta\epsilon$ rectus est. Itaque puncta δ, β, ϵ in eadem recta sunt (14, I.) Quoniam autem $\alpha\delta = \delta\beta$, et $\epsilon\gamma = \epsilon\beta$, erit $\alpha\delta : \delta\beta = \epsilon\gamma : \epsilon\beta$ (5. Def. V.). Circa aequales itaque angulos δ, ϵ latera sunt proportionalia: angulus igitur $\delta\beta\alpha$ aequalis est angulo $\gamma\beta\epsilon$ (6, VI.). Est autem $\delta\beta\epsilon$ recta: itaque etiam recta est, quae per α, β, γ transit (3. Schol.* 15, I.). Q. E. D.

* Observ. Quamvis figura eum tantum Casum exprimat, quo circuli extra se contingunt, facile tamen patet, idem adhuc valere, etiam si circuli intra se contingant.

Lemm. XVI. (Lib. VII. Prop. CXI.)
Ad Probl. XXV.

Fig. 22.

Si recta $\alpha\beta$ aequalis sit rectae $\beta\gamma$, et recta $\alpha\delta$ ipsi $\delta\epsilon$, sitque simul $\delta\epsilon$ parallela ipsi $\beta\gamma$: ostendere, rectam esse, quae per puncta α, ϵ, γ transit. Jungantur rectae $\alpha\epsilon$, $\epsilon\gamma$, ipsique $\alpha\epsilon$ parallela ducatur recta $\beta\zeta$, et producatur recta $\epsilon\delta$ ad ζ. Aequalis itaque est recta $\delta\zeta$ ipsi $\delta\beta$ (4, VI.). Est vero etiam recta $\alpha\delta$ aequalis ipsi $\delta\epsilon$. Itaque tota $\alpha\beta$ aequalis est toti $\zeta\epsilon$. At $\alpha\beta$ etiam aequalis est ipsi $\beta\gamma$. Recta $\beta\gamma$ igitur aequalis est ipsi $\zeta\epsilon$. Eidem autem est parallela. Proinde recta est, quae per puncta α, ϵ, γ transit, Hoc enim manifestum est (33, I. coll. 29, I. et 14, I.).

Lemma XVII. (Lib. VII. Prop. CXII.)
(Cor. 37, III. Eucl.)
Ad Problema XXXI.

Fig. 23.

Si sit circulus $\alpha\beta\gamma$, et (ex eodem puncto δ) ducantur duae rectae aequales $\beta\delta$, $\delta\gamma$, quarum $\beta\delta$ tangat circulum:

culum: dico, etiam $\delta\gamma$ eum contingere. Hoc vero patet. Si enim ducatur recta $\delta\alpha$ (quae circulo in puncto α, ι occurrat), erit rectangulum $\alpha\delta\iota$ aequale quadrato ex $\delta\beta$ (36, III.). At quadratum ex $\delta\beta$ aequale est quadrato ex $\delta\gamma$. Rectangulum igitur $\alpha\delta\iota$ aequale est quadrato ex $\delta\gamma$. Itaque $\delta\gamma$ tangit circulum $\alpha\beta\gamma$ (37, III.).

Lemma XVIII. (Lib. VII. Prop. CXIII.)

Fig. 21.

Sint duo circuli $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, (qui punctum β commune habeant), et per punctum β ducta sit recta aliqua $\alpha\beta\gamma$ (occurrens uni circulorum in α, alteri in γ), ductaeque duae parallelae rectae $\alpha\delta$, $\iota\gamma$ vergant ad centra circulorum: dico, circulos $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ contingere se invicem in puncto β. Capiantur centra circulorum δ, ι, et jungantur rectae $\delta\beta$, $\beta\iota$. Recta est igitur, quae per puncta δ, β, ι transit. Recta enim $\alpha\delta$ parallela est ipsi $\gamma\iota$, atque est $\alpha\delta : \delta\beta = \gamma\iota : \iota\beta$. Fiunt itaque duo triangula habentia unum angulum α aequalem uni γ (29, I.), circa alios autem angulos δ, ι latera proportionalia [reliquorum vero $\delta\beta\alpha$, $\gamma\beta\iota$ utrumque simul minorem recto (3. Schol. 17, I.)]: itaque triangula sunt aequiangula (7, VI.), adeoque angulus $\alpha\beta\delta$ aequalis est angulo $\gamma\beta\iota$. Et, quum recta sit $\alpha\beta\gamma$, recta erit $\delta\beta\iota$ (3. Schol. 15, I.) Quoniam autem recta per centra et punctum occursus transit, circuli $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ se invicem in puncto β contingunt (1. Cor. Lemm. D.). Q. E. D. * Eadem Observatio locum habet, quae in Lemmate XV.

Lemma XIX. (Lib. VII. Prop. CXIV.)
Ad Problema LII.

Fig. 24.

Sit recta $\alpha\beta$ parallela rectae $\gamma\delta$, recta autem $\alpha\gamma$ aequalis ipsi $\beta\delta$, angulus autem $\alpha\gamma\delta$ obtusus, $\beta\delta\gamma$ contra

ra acutus: dico, $\alpha\delta$ esse parallelogrammum. Quoniam $\gamma\delta$ est angulus obtusus, $\beta\delta\gamma$ vero acutus, perpendicularium ex α et β in $\gamma\delta$ ductarum, ea quidem, quae ex α ducitur, extra γ, ea vero, quae ex β ducitur, intra δ cadit (2. Schol. 17, I.). Demittantur, sintque rectae $\alpha\iota$, $\beta\zeta$. Recta itaque $\alpha\iota$ parallela est ipsi $\beta\zeta$ (28, I.). At $\alpha\beta$ parallela est ipsi $\gamma\delta$, et anguli ι, ζ recti sunt: aequalis igitur est $\zeta\delta$ ipsi $\iota\gamma$ [47, I. Nempe in parallelogrammo $\alpha\iota\beta\zeta$ habemus $\alpha\iota = \beta\zeta$ (34, I.), et ex hypothesi $\alpha\gamma = \beta\delta$]. Itaque etiam tota $\iota\zeta$ aequalis est toti $\gamma\delta$. Proinde $\alpha\beta$ aequalis est ipsi $\gamma\delta$, [quia nempe $\iota\zeta = \alpha\beta$ (34, I.). Adeoque $\alpha\beta\gamma\delta$ est parallelogrammum (33, I.)].

Lemma XX. (Lib. VII. Prop. CXV.)

Fig. 25.

Sint duo circuli aequales $\alpha\beta$, $\delta\gamma$, rectaque $\alpha\delta$ transeat per eorum centra, sit autem $\iota\zeta$ parallela ipsi $\gamma\delta$: dico, $\iota\zeta$ productam, secare etiam circulum $\alpha\beta$. Capiantur centra circulorum η, ϑ, atque ex his punctis ducantur $\eta\kappa$, $\vartheta\lambda$ perpendiculares ad $\alpha\delta$ (11, I.), et jungatur recta $\kappa\lambda$. Et, quum recta $\eta\kappa$ aequalis sit ipsi $\vartheta\lambda$, eidemque parallela, recta $\kappa\lambda$ aequalis et parallela est ipsi $\eta\vartheta$ (33, I.), adeoque anguli κ, λ recti sunt (29, I.). Sunt autem $\eta\kappa$, $\vartheta\lambda$ ductae ex centris. Itaque $\kappa\lambda$ circulos contingit (Cor. 16, III.). Patet igitur, eandem rectam, quae circulum $\delta\gamma$ tangit, tangere etiam circulum $\alpha\beta$. Proinde recta $\iota\zeta$, quae circulum $\gamma\delta$ secat, secabit etiam circulum $\alpha\beta$. Producta nempe, ac major tantum ipsa $\iota\zeta$, erit etiam inter puncta β, λ, ut $\iota\zeta$ est inter puncta γ, κ.

* Aliter ita. Ducatur recta $\eta\iota$, eique parallela $\vartheta\mu$, quae necessario cum $\iota\zeta$ in puncto aliquo μ conveniet. Ducta enim $\vartheta\iota$, est angulus $\mu\vartheta\iota = \eta\iota\vartheta$ (29, I.) et ang. $\zeta\iota\vartheta = \iota\vartheta\eta$ (29, I.). At $\eta\iota\vartheta + \iota\vartheta\eta < 2$ rectis (17, I.). Itaque

que $\mu\theta\varepsilon + \zeta\varepsilon\theta < 2$. rectis, adeoque $\theta\mu$, $\varepsilon\zeta$ conveniunt in puncto aliquo μ (11. Ax, I.). Et in parallelogrammo $\eta\theta\mu$ habemus $\theta\mu = \eta\varepsilon$ (34, I.). At ex hypothesi $\eta\varepsilon = \theta\beta$. Itaque $\theta\beta = \theta\mu$, et punctum μ est in circulo $\alpha\beta$. Simili ratione ducta $\theta\nu$ parallela ipsi $\eta\gamma$, ostendetur, rectas $\theta\nu$, $\varepsilon\zeta$ inter se convenire in puncto aliquo ν, atque esse punctum ν in circulo $\alpha\beta$. Recta itaque $\varepsilon\zeta$ secat circulum $\alpha\beta$ in punctis μ, ν.

Lemma XXI. (Lib. VII. Prop. CXVI.)

Fig. 26.

Sit $\delta\alpha$ aequalis ipsi $\alpha\varepsilon$, $\beta\delta$ autem major ipsa $\gamma\varepsilon$, et jungatur $\delta\varepsilon$: dico, $\delta\varepsilon$ productam convenire cum $\beta\gamma$. Sumatur $\delta\zeta$ aequalis ipsi $\gamma\varepsilon$, et jungatur $\gamma\zeta$, quae itaque parallela est ipsi $\delta\varepsilon$ (2, VI.). At $\beta\gamma$ occurrit rectae $\zeta\gamma$. Itaque etiam $\delta\varepsilon$ occurrit rectae $\beta\gamma$ (17, I. 29, I. et 11. Ax. I.).

Lemma XXII. (Lib. VII. Prop. CXVII.)

Problema ad eandem (Apollonii Propositionem, ad quam praecedens Lemma pertinet.)

Fig. 27.

Circulo $\alpha\beta\gamma$ positione dato, datisque in eadem recta tribus punctis $\delta, \varepsilon, \zeta$ ducere rectas $\delta\alpha$, $\alpha\varepsilon$ (quae circulo iterum occurrant in punctis β, γ), ita ut $\beta\gamma$, $\gamma\zeta$ sint in directum.

Analysis.

Puta factum, et ex puncto β ducatur recta $\beta\eta$ parallela ipsi $\delta\zeta$, jungatur $\eta\gamma$, ac producatur ad θ. Angulus itaque $\beta\eta\gamma$ i. e. angulus α (21, III.) aequalis est angulo $\gamma\theta\zeta$ (29, I.). Itaque rectangulum $\alpha\varepsilon\gamma$ aequale est rectan-

ctan-

tangulo $\delta\epsilon\vartheta$ (2. Schol. 5, IV et 1. Schol. 36, III.). Datum autem est rectangulum $\alpha\epsilon\gamma$ aequale quippe (36, III.) quadrato, quod ex ϵ ad circulum $\alpha\beta\gamma$ duci potest (94. D.). Itaque etiam rectangulum $\delta\epsilon\vartheta$ datum est. At data est recta $\delta\epsilon$. Data itaque recta $\epsilon\vartheta$ (61. D.). Eadem autem et positione data est, datumque punctum ϵ: datum itaque etiam punctum ϑ (29. D.). At etiam punctum ζ datum est. Problema itaque eo redit: à duobus punctis datis ϑ, ζ inflectere rectas $\vartheta\gamma$, $\gamma\zeta$ ita ut (circulo iterum occurrant in punctis β, η ac) fiat recta $\beta\eta$ parallela ipsi $\vartheta\zeta$. Hoc vero supra docuimus (Lemm. M. N. O. P.). Datum est itaque punctum γ. At etiam punctum ϵ datum est. Recta itaque $\gamma\epsilon$ positione data (29. D.). Et, quum etiam circulus datus sit, datum est punctum α (28. D.). At datum est etiam punctum δ. Recta itaque $\delta\alpha$ positione data est (29. D.) Q. E. D.

* *Determinatio.*

(Quamvis Pappus nullam Problematis Determinationem dederit, tamen utpote maxime necessariam hic subjungendam putavi.)

Primo quidem patet, nullum ex punctis datis δ, ϵ, ζ in ipso circulo esse posse. Nam, si v. g. punctum ϵ esset in circulo, puncta ϵ, γ, adeoque rectae $\delta\epsilon$, $\delta\gamma$ coinciderent, rectaque $\beta\gamma$, aut $\beta\epsilon$, quae tum rectam $\delta\epsilon$ secaret in puncto ϵ, non posset, ut tamen supponitur, eam secare adhuc in alio quodam puncto ζ (12. Ax. I.). Quodsi que è tribus punctis datis duo quaelibet, v. c. puncta ϵ consideremus, aut utrumque extra circulum, aut utrumque intra circulum, aut unum eorum extra circulum, alterum vero intra circulum esse manifestum est.

1.) Utrumque punctorum δ, ε extra circulum: dico, etiam punctum ζ extra circulum esse debere. Ac id eo quidem casu per se patet, quo $\delta\varepsilon$ nec ipsa, nec producta circulo occurrit. Si vero $\delta\varepsilon$ ipsa, aut producta circulo occurrat, erit recta $\delta\beta\alpha$, adeoque puncta β, α ex determinata parte rectae $\delta\varepsilon$ v.g. supra $\delta\varepsilon$. At ob punctum α commune ex eadem parte est etiam recta $\varepsilon\gamma\alpha$, adeoque puncta γ, α. Puncta itaque β, γ sunt ex eadem parte rectae $\delta\varepsilon$, adeoque chorda $\beta\gamma$, non ipsa, sed producta saltim convenire potest cum recta $\delta\varepsilon$ in puncto aliquo ζ. At chorda producta tota cadit extra circulum. Punctum itaque ζ extra circulum sit necesse est. Generaliter itaque: si duo quaecunque punctorum datorum extra circulum sint, tertium quoque extra circulum esse debet. Sit vero

2.) Utrumque punctorum δ, ε intra circulum: dico, punctum ζ necessario extra circulum esse. Erunt enim semper β et α è diversis rectae $\delta\varepsilon$ partibus, pariterque γ et α è diversis rectae $\delta\varepsilon$ partibus sunt. Proinde β et γ ex eadem rectae $\delta\varepsilon$ partibus erunt, adeoque chorda $\beta\gamma$ non ipsa, sed producta saltim cum recta $\delta\varepsilon$ in puncto aliquo ζ convenire potest. Punctum itaque ζ erit extra circulum. Ac generaliter: si duo quaecunque punctorum datorum sint intra circulum, tertium extra circulum esse debet. Sit denique

3.) Unum punctorum δ, ε extra circulum, alterum vero intra circulum: dico, punctum ζ intra circulum esse debere. Si enim punctum ζ extra circulum foret, etiam tertium punctum, quod intra circulum esse supponimus, ex nr. 1. extra circulum esse deberet g. e. a. Generaliter itaque: si è duobus quibuscunque punctorum datorum unum sit extra circulum, alterum vero intra circulum, tertium quoque intra circulum sit oportet.

Hinc

Hinc manifeſtum eſt, neceſſario aut omnia tria puncta extra circulum, aut duo quidem intra circulum, tertium vero extra circulum eſſe debere, nunquam vero aut omnia tria puncta intra circulum, aut duo quidem extra circulum, tertium vero intra circulum eſſe poſſe.

Praeterea vero punctum ϑ, quod in Compoſitione ita determinandum erit, ut rectangulum $\delta\iota\vartheta$ aequale ſit rectangulo $\alpha\iota\gamma$, ex Lemm. M, N, O, P, ita ſemper ſitum eſſe debet, ut extra circulum ſit, ſi punctum ζ ſit extra circulum, intra circulum autem, ſi punctum ζ ſit intra circulum. Id autem ſemper fieri in Compoſitione monſtrandum erat. In qua cum à Pappo praetermiſſum ſit, hic adjiciendum videbatur. Sint itaque iterum

1.) Puncta δ et ι, adeoque etiam punctum ζ extra circulum: dico, etiam punctum ϑ extra circulum fore. Ac id eo quidem caſu per ſe patet, quo $\delta\iota$ nec ipſa nec producta circulo occurrit. Si vero $\delta\iota$ aut ipſa, aut producta circulo occurrat, occurrat in punctis $\varkappa, \lambda$, ſintque

a.) puncta δ, ι ex eadem parte circuli, ſitque ι punctum à circulo remotius (nam ſi δ ſit punctum remotius, res per ſe patet, quia $\iota\vartheta$ ex ι verſus δ ponitur, quotiescunque ι eſt extra circulum), ſitque inter $\varkappa, \lambda$ puncta, $\varkappa$ illud, quod punctis δ, ι propius eſt, λ vero remotius. Quoniam igitur rectg. $\delta\iota\vartheta =$ rectg. $\alpha\iota\gamma =$ rect. $\varkappa\iota\lambda$ (1. Schol. 36, III.), erit $\iota\delta : \iota\lambda = \iota\varkappa : \iota\vartheta$ (16, VI.) At $\iota\delta < \iota\varkappa$; itaque etiam $\iota\lambda < \iota\vartheta$ (14, V.), adeoque punctum ϑ cadit extra circulum, ab ea circuli parte, ex qua non ſunt puncta ι, δ. Sint vero

b.) puncta δ, ι ex diverſis circuli partibus, ſitque inter $\varkappa, \lambda$ puncta, λ illud, quod puncto ι propius eſt, $\varkappa$ vero remotius, eritque ut ante $\iota\delta : \iota\lambda = \iota\varkappa : \iota\vartheta$. At jam $\iota\delta > \iota\varkappa$, adeoque $\iota\lambda > \iota\vartheta$ i. e. punctum ϑ eſt extra circulum, ab ea illius parte, ex qua eſt punctum ι.

2.) Si puncta δ et ι sint intra circulum, adeoque punctum ζ extra circulum: dico, etiam punctum ϑ extra circulum fore. Nam, si recta $\delta\iota$ iterum occurrat circulo in punctis $\varkappa$, λ, ita, ut $\varkappa$ sit ex ea parte puncti ι, ex qua est δ, λ vero ex parte contraria, erit rectangulum $\delta\iota\vartheta$ = rectg. $\alpha\iota\gamma$ = rectg. $\varkappa\iota\lambda$ (35, III.), adeoque $\iota\delta : \iota\lambda = \iota\varkappa : \iota\vartheta$ (16, VI.). At $\iota\delta < \iota\varkappa$, adeoque $\iota\lambda < \iota\vartheta$ (14, V.). At, quotiescunque punctum ι intra circulum $\alpha\beta\gamma$, adeoque inter puncta α, γ, ac proinde intra eum circulum est, qui per puncta $\alpha\gamma\delta\vartheta$ describi potest, erit necessario inter puncta δ, ϑ i. e. $\iota\vartheta$ ex ea parte puncti ι poni debet, e qua non est punctum δ. Nostro itaque casu puncta λ et ϑ sunt ex eadem parte puncti ι, adeoque, quum $\iota\lambda < \iota\vartheta$, punctum ϑ est necessario extra circulum $\alpha\beta\gamma$ ab ea parte puncti ι, à qua non est punctum δ. Denique si

3.) Unum punctorum δ, ι sit intra circulum, alterum vero extra circulum, adeoque punctum ζ intra circulum: dico, etiam punctum ϑ intra circulum fore. Nempe si

a.) punctum δ sit intra circulum, punctum ι vero extra circulum, $\iota\vartheta$ ponenda erit ex ea parte puncti ι, ex qua est δ. Quodsi jam $\iota\delta$ circulo $\alpha\beta\gamma$ occurrat in punctis $\varkappa$, λ, quorum $\varkappa$ sit ex ea parte puncti δ, ex qua est ι, λ vero ex parte contraria, erit, ut nr. 1. $\iota\delta : \iota\lambda = \iota\varkappa : \iota\vartheta$. At $\iota\delta > \iota\varkappa$, quare $\iota\lambda > \iota\vartheta$ (14, V.). Pariter vero $\iota\delta : \iota\varkappa = \iota\lambda : \iota\vartheta$ (16, V.). At $\iota\delta < \iota\lambda$, quare et $\iota\varkappa < \iota\vartheta$ (14, V.). Itaque punctum ϑ est intra circulum. Si vero

b.) punctum δ sit extra circulum, punctum vero ι intra circulum, $\iota\vartheta$ ponetur ex ea parte puncti ι, ex qua non est punctum δ. Ac, si $\iota\delta$ circulo $\alpha\beta\gamma$ occurrat in punctis $\varkappa$, λ, quorum $\varkappa$ sit ex ea parte puncti ι, ex qua est δ, λ vero ex parte contraria, erit, ut nr. 2. $\iota\delta : \iota\lambda = \iota\varkappa : \iota\vartheta$. At $\iota\delta > \iota\varkappa$. Itaque et $\iota\lambda > \iota\vartheta$ (14, V.), adeoque punctum

ϑ est

ϑ est intra circulum. Dubitari adhuc posset, annon puncta ϑ et ζ quibusdam casibus coincidere possint, ita, ut Problema nullam Lemmatum M, N, O, P applicationem admitteret. At observetur, puncta ϑ, ζ tum certe haud inter se coincidere posse, si sint è diversis puncti ι partibus. Atqui vero, quotiescunque punctum ι est extra circulum, recta $\iota\vartheta$ ponenda est ab ea puncti ι parte, ex qua est punctum δ. Quodsi itaque puncta δ, ζ sint è diversis puncti ι partibus, puncta ϑ, ζ haud sane coincident. Si vero puncta δ, ζ sint ex eadem parte puncti ι, fieri omnino posset, ut puncta ϑ, ζ coinciderent. Neque tamen inde efficeretur, ut Problema prorsus solvi non posset. Illud saltim inde concludi posset, puncta δ, ι haud esse satis apta ad incipiendam ab iis hoc modo Problematis Solutionem. Reapse, reliquorum punctorum δ, ζ erit tum necessario aut utrumque extra circulum, aut utrumque intra circulum. Si utrumque sit extra circulum, unum v. g. ζ erit necessario intermedium inter reliqua duo puncta. Si igitur punctum ζ loco puncti ι eligatur, ac cum unoquovis extremorum v. g. cum puncto δ jungatur, semper punctum aliquod ϑ determinari poterit, ita ut rectg. $\delta\zeta\vartheta$ aequale sit rectg. $\beta\zeta\gamma$, quod punctum ϑ deinde cum reliquo puncto ι certe haud conveniet, erunt enim ι et ϑ è diversis puncti ζ partibus. Si vero utrumque punctorum δ, ζ sit intra circulum, unum, v. g. ζ erit necessario à puncto ι remotius altero. Et, si iterum punctum ι loco puncti ζ eligatur, et cum puncto δ jungatur, punctum ϑ, quod jam ita determinari debet, ut sit rectang. $\delta\zeta\vartheta$ aequale rectangulo $\beta\zeta\gamma$, ponendum erit ab ea puncti ζ parte, à qua non sunt puncta δ, ι, adeoque puncta ϑ, ι non coincident. Simili ratione, si punctum ι sit intra circulum, ostenditur, aut puncta ϑ, ζ non posse coincidere, aut, si coin-

cidere possint, pro punctis δ, ι alia duo, v. g. δ, ζ eligi posse ad incipiendam ab ipsis Problematis Solutionem, ita, ut puncta ϑ, ι non possint coincidere. Omnibus igitur casibus duo diversa puncta ϑ, ζ, aut ϑ, ι, aut ϑ, δ determinari poterunt, quorum ope ex Lemmatibus M, N, O, P, Problema solvetur, nempe ex Lemmate M vel N si v. g. puncta ϑ, ζ sint extra circulum, ex Lemmate vero O vel P, si puncta ϑ, ζ sint intra circulum. Unde patet, nostrum hoc Problema duplicem semper nancisci Solutionem, v. c. unam ex Lemmate M alteram ex Lemmate N vel unam ex Lemmate O alteram ex Lemmate P, nisi nempe nova addita conditione determinetur, utrum ex Lemmatibus M, N vel ex Lemmatibus O, P adhiberi debeat. Caeterum omnis illa quaestio, an Problema Solutionem aliquam admittat eo Casu, quo puncta ϑ, ζ coincidant, evitari poterat, Analysi paullo curatius instituta. Nempe recta $\beta\eta$ ipsi $\delta\iota$ parallela haud necessario, ut Pappus in Analysi sumere videtur, circulo iterum in alio quodam puncto η occurrit, sed potest etiam circulum in puncto β contingere.

Fig. 28.

Quod si fiat, erit angulus $\beta\alpha\gamma = \eta\beta\gamma$ (32, III.). At $\eta\beta\gamma = \gamma\zeta\iota$ (29, I.). Angulus itaque $\beta\alpha\gamma = \gamma\zeta\iota$, adeoque triangula $\iota\alpha\delta$, $\iota\zeta\gamma$ sunt aequiangula (2. Schol. 32, I.), et $\iota\alpha : \iota\delta = \iota\zeta : \iota\gamma$ (4, VI.), ac rectangulum $\zeta\iota\delta$ aequale rectang. $\alpha\iota\gamma$ (16, VI.). Si igitur hoc casu sumatur, ut ex Pappi Analysi fieri deberet, rectang. $\vartheta\iota\delta =$ rectangul. $\alpha\iota\gamma$, foret rectangulum $\vartheta\iota\delta =$ rectang. $\zeta\iota\delta$, adeoque $\vartheta\iota = \zeta\iota$. Si itaque punctum ζ sit ex ea parte puncti ι, ex qua, ut supra diximus, recta $\iota\vartheta$ poni debet, manifestum est, puncta ζ et ϑ coincidere. Neque vero minus reliqua Analysis, et ad

ejus

ejus normam Compositio absolvi poterit. Ducatur nempe ex centro ι recta $\iota\beta$, quae rectae $\delta\epsilon$ in puncto μ occurrat, eritque ang. $\iota\beta\eta$ rectus (18, III.), adeoque etiam angulus $\iota\mu\epsilon$ rectus erit (29, I.). At recta $\epsilon\delta$ positione datur, et datum est punctum ι: recta igitur $\iota\mu$ positione datur (33. D.). At etiam circulus positione datur. Punctum itaque β datum est (28. D.). At etiam puncta δ, ζ data sunt. Rectae igitur $\delta\beta\alpha, \zeta\beta\gamma$ positione dantur (29. D.). At etiam circulus. Puncta igitur α, γ data sunt (28. D.). Q. E. D. Caeterum facile patet, Compositionem etiam ex hac Analysi derivatam duas dare Solutiones, quod nempe recta $\iota\mu$ ad $\delta\epsilon$ perpendicularis circulo, cujus diameter in hac recta posita est, in duobus punctis β, B occurrit. Reliquos Casus omnes, immo hunc quoque, ut ostendimus, paucissimis tantum mutationibus factis, Pappi complectitur Compositio, quam itaque brevitatis studio solam hic exhibemus.

Compositio.

Fig. 27.

Sit circulus datus $\alpha\beta\gamma$, tria autem puncta data in eadem recta δ, ϵ, ζ (quae ex Determinatione vel omnia tria extra circulum esse debent, vel duo intra circulum, tertium extra circulum), fiatque rectangulum $\delta\epsilon\vartheta$ aequale quadrato contingentis ex ϵ ad circulum ductae (Cor. 16, VI.). Datisque duobus punctis ϑ, ζ, inflectantur ex ipsis rectae $\vartheta\gamma$, $\zeta\gamma$, ita ut (circulo iterum occurrant in punctis η, β, ac) fiat $\beta\eta$ parallela ipsi $\vartheta\zeta$ (Lemm. M.), jungaturque recta $\epsilon\gamma$, et producatur ad α: dico, rectam esse, quae per puncta α, β, δ transit. Quoniam enim utrumque rectangulorum $\alpha\epsilon\gamma$ (36, III.), et $\delta\epsilon\vartheta$ aequale est quadrato contingentis ex ϵ ad circulum ductae, rectangulum $\alpha\epsilon\gamma$ aequale est rectangulo $\delta\epsilon\vartheta$. In circulo itaque sunt puncta $\delta, \vartheta, \gamma, \alpha$ (16, VI. 6, VI. et 2. Schol. 5, IV.). Et, quoniam

niam aequalis est angulus $\beta\eta\zeta$ angulo $\gamma\vartheta\zeta$ (29, I.), at angulus $\beta\eta\gamma$ aequalis angulo $\beta\alpha\gamma$ in eodem circuli segmento (21, III.); angulus $\beta\alpha\gamma$ aequalis est angulo $\gamma\vartheta\varepsilon$. Sunt autem puncta $\alpha, \gamma, \delta, \vartheta$ in circulo [adeoque angulus $\delta\alpha\gamma$ aequalis angulo $\gamma\vartheta\varepsilon$ (22, III.)]; itaque $\alpha\beta$, $\beta\delta$ in eadem recta sunt. Reliqua autem huc pertinentia, et diversi casus reducuntur ad casus Lemmatis quod pertinet ad Apollonii XVI.

** Computàtio.*

Sit centrum circuli ι, eritque, si ε sit extra circulum, $\delta\varepsilon \times \varepsilon\vartheta = \iota\varepsilon^2 - \iota\alpha^2$, vel $\varepsilon\vartheta = \frac{(\iota\varepsilon + \iota\alpha)(\iota\varepsilon - \iota\alpha)}{\varepsilon\delta}$. Si vero ε sit intra circulum, erit $\delta\varepsilon \times \varepsilon\vartheta = \iota\alpha^2 - \iota\varepsilon^2$, vel $\varepsilon\vartheta = \frac{(\iota\alpha + \iota\varepsilon)(\iota\alpha - \iota\varepsilon)}{\delta\varepsilon}$. Reliquà prorsus redeunt ad calculum Lemmatum M, N, O, P, quibus, quum usus eorum in libris Apollonii haud adeo magnus sit, non diutius immorabimur. Si quis, pro casu fig. 28. expresso, Computationem specialem desideret, omnia facillime persici posse deprehendet.

** Observatio.*

Generalius, et pro eo quoque Casu, quo puncta data non sunt in eadem recta, Problema tractavere Castillon (Mém. de l'Acad. de Berlin pour l'année 1776) et Euler ac Fuss (Act. Acad. Petropolit. 1780.). Neque tamen cum Castilloneo putaverim, esse apud Pappum reliquias tantum Problematis generalioris, quod à vetere aliquo Mathematico propositum, temporis injuria è scriptis Mathematicorum exciderit, at traditione conservatum fuerit. Pappus enim affert Problema tantum ut Lemma tractationi de Tactionibus inserviens. Isti vero consilio sufficiebat Casus specialis, neque igitur Pappus, hic certe, de Problemate generaliore dicere opus habebat.

Lemm.

Lemm. XXIII. (Lib. VII. Prop. CXVIII.)

Fig. 29.

Sint duo circuli $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ et in producta recta $\alpha\delta$ sumatur punctum η tale, ut $\epsilon\eta$ ad $\eta\zeta$ sit in eadem ratione, ac radius circuli $\alpha\beta$ ad radium circuli $\gamma\delta$: dico, rectam, quae ex η ducta secat circulum $\gamma\delta$, productam secare etiam circulum $\alpha\beta$. Capiantur enim centra circulorum ϵ, ζ, et ex puncto η ducatur recta $\eta\vartheta$ contingens circulum $\gamma\delta$ (17, III.) et jungatur $\zeta\vartheta$, cui parallela ducatur $\epsilon\varkappa$. Quoniam igitur est $\epsilon\eta : \eta\zeta = \epsilon\varkappa : \zeta\vartheta$ [vel $\epsilon\eta : \epsilon\varkappa = \eta\zeta : \zeta\vartheta$ (16, V.)]; recta est, quae per puncta η, ϑ, $\varkappa$ transit (Demonstrari id potest simili prorsus ratione ac 32, VI.). At angulus ϑ rectus est (18, III.). Itaque etiam angulus $\varkappa$ rectus erit (29, I.). Quae igitur recta ex η ducta circulum $\gamma\delta$ tangit, producta tangit quoque circulum $\alpha\beta$ (Cor. 16, III.). At, quae circulum $\gamma\delta$ secant, inter puncta δ, ϑ transeunt: productae igitur inter puncta $\varkappa$, β transibunt. At recta $\eta\varkappa$ tangit circulum $\alpha\beta$. Recta autem, quae inter puncta β, $\varkappa$, δ, ϑ transit, secat circulum $\gamma\delta$. Eadem autem secat et circulum $\alpha\beta$. Recta igitur, quae ex puncto η ducta secat circulum $\gamma\delta$, secat etiam circulum $\alpha\beta$.

Prior de Tactionibus Liber habet Problemata septem, posterior quatuor.

* *Observatio ad Lemm. XXIII.*

Multa in Enunciatione pariter ac Demonstratione hujus Lemmatis vitiosa sunt. Quippe Pappus indicare videtur, punctum η sumi tantum posse in recta $\alpha\delta$ producta, quum tamen etiam in ipsa recta $\alpha\delta$, vel potius in ipsa adeo recta $\epsilon\zeta$ inter puncta ϵ et ζ sumi possit punctum η tale, ut $\epsilon\eta : \eta\zeta = \epsilon\varkappa : \zeta\vartheta$ (10, VI.). Deinde monendum erat, punctum η in recta $\epsilon\zeta$ ultra ζ producta sumi

tan

tantum posse, si circuli $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ sint inaequales, $\alpha\beta$ nempe major, ac $\gamma\delta$ minor. Reapse enim, si $\epsilon\eta : \eta\zeta = \epsilon\kappa : \zeta\delta$, sitque punctum η in recta $\epsilon\zeta$ producta, erit $\epsilon\eta = \epsilon\zeta + \eta\zeta$. Itaque $\epsilon\zeta : \eta\zeta = \epsilon\kappa - \zeta\delta : \zeta\delta$ (17, V.). Quae proportio ut locum habere possit, radius $\epsilon\kappa$ major esse debet radio $\zeta\delta$. Si enim foret $\epsilon\kappa = \zeta\delta$, nulla inter $\epsilon\kappa - \zeta\delta$ ac $\zeta\delta$ (4. Defin. V.) adeoque inter $\epsilon\zeta$ ac $\eta\zeta$ ratio esse posset, vel, ut recentiores loqui solent, infinita foret recta $\eta\zeta$. Si vero esset $\epsilon\kappa < \zeta\delta$, recta $\eta\zeta$ negativum valorem indueret, punctumque η non, ut sumebatur, in recta $\epsilon\zeta$ ultra ζ producta, sed potius in recta $\epsilon\zeta$ ultra ϵ producta capiendum foret. Denique innuit saltim, quod expresse dicendum erat, circulos $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ haud ex eodem centro descriptos esse debere. In Demonstratione autem ad finem subobscura sumit, punctum η esse extra circulum $\gamma\delta$ adeoque etiam extra circulum $\alpha\beta$, quod tamen haud fieri necessario, mox videbimus. Proinde Lemma ita restituendum putem:

** Lemma Q. (Apud Pappum Lemma XXIII.)*.

Dati sint duo circuli $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ non ex eodem centro descripti, sintque centra eorum ϵ, ζ, jungaturque recta $\epsilon\zeta$: dico, sumi posse in ipsa recta $\epsilon\zeta$, et, si circuli sint inaequales, major nempe circulus $\alpha\beta$, minor vero circulus $\gamma\delta$, sumi posse praeterea in recta $\epsilon\zeta$ ultra ζ producta punctum η tale, ut sit $\epsilon\eta$ ad $\eta\zeta$ in eadem ratione ac radius circuli $\alpha\beta$ ad radium circuli $\gamma\delta$, ductaque ex puncto η recta quacunque, quae secet alterutrum circulorum v. g. circulum $\gamma\delta$, dico eandem productam secare etiam alterum circulum $\alpha\beta$.

Si enim punctum η sumi debet in ipsa recta $\epsilon\zeta$, erit $\epsilon\zeta = \epsilon\eta + \eta\zeta$, adeoque, si $\alpha\epsilon$ sit radius circuli $\alpha\beta$, $\gamma\zeta$ vero radius circuli $\gamma\delta$, punctum η sumendum est ita, ut sit $\alpha\epsilon : \gamma\zeta = \epsilon\eta : \eta\zeta$ i.e. ita, ut sit $\alpha\epsilon + \gamma\zeta : \gamma\zeta = \epsilon\zeta : \eta\zeta$

(18,

(18, V.). At, quum rectae $\alpha\iota$, $\gamma\zeta$, $\iota\zeta$ datae sint, data erit recta $\eta\zeta$ magnitudine (2. D.). Eadem autem et positione data est, datumque punctum ζ :. datum itaque erit punctum η (30. D.).

Si vero punctum η sumi debet in recta $\iota\zeta$ ultra ζ producta, sumendum erit ita, ut $\alpha\iota : \gamma\zeta = \iota\eta : \eta\zeta$ i. e. quum jam $\iota\eta - \eta\zeta = \iota\zeta$, ita, ut $\alpha\iota - \gamma\zeta : \gamma\zeta = \iota\zeta : \eta\zeta$. Unde, quum jam ex suppositione sit $\alpha\iota > \gamma\zeta$, dataeque sint rectae $\alpha\iota$, $\gamma\zeta$, $\iota\zeta$, data erit recta $\eta\zeta$ (2. D.), punctumque η (30. D.).

Utroque casu dico, rectam quamcunque, quae ex η ducta secet alterutrum circulum v. g. $\gamma\delta$, secare etiam alterum circulum $\alpha\beta$. Sit enim recta quaecunque $\eta\lambda$, quae secet circulum $\gamma\delta$ in puncto λ, jungatur $\zeta\lambda$, eique parallela recta $\iota\mu$, ita, ut rectae $\iota\mu$, $\zeta\lambda$ sint è diversis rectae $\iota\zeta$ partibus, si punctum η sumtum est in ipsa recta $\iota\zeta$, ex eadem vero parte rectae $\iota\zeta$, si punctum η sumtum fuit in recta $\iota\zeta$ ultra ζ producta: recta $\iota\mu$ necessario conveniet cum recta $\eta\lambda$ in puncto aliquo μ. Est enim angulus $\lambda\zeta\eta = \mu\iota\eta$ (29, I.). At $\lambda\zeta\eta + \zeta\eta\lambda < 2.$ rectis (17, I.). Itaque etiam $\mu\iota\eta + \zeta\eta\lambda < 2$ rectis. Proinde rectae $\iota\mu$, $\lambda\eta$ conveniunt in puncto aliquo μ [11. Ax. I. Nempe, si η sit in ipsa $\iota\zeta$, erit $\iota\eta\mu = \zeta\eta\lambda$ (15, I.)]. Et, quum in triangulis $\iota\mu\eta$, $\zeta\lambda\eta$ sint anguli ι et ζ aequales (29, I.), angulus autem η communis, vel aequalis (15, I.), adeoque etiam anguli μ et λ aequales (2. Schol. 32, I.): erit $\eta\zeta : \iota\eta = \zeta\lambda : \iota\mu$ (1. Schol. 4, VI.). At ex hypothesi $\eta\zeta : \iota\eta = \gamma\zeta : \alpha\iota$. Itaque $\gamma\zeta : \alpha\iota = \zeta\lambda : \iota\mu$ (11, V.). Est autem $\gamma\zeta = \zeta\lambda$, quare et $\alpha\iota = \iota\mu$ (14, V.). Recta igitur $\eta\lambda$ occurrit circulo $\alpha\beta$ in puncto μ.

1. Cor. Si punctum η sumtum sit in ipsa recta $\iota\zeta$, erit extra utrumque circulum, si uterque circulorum positus sit totus extra alterum i. e. si sit $\iota\zeta > \alpha\iota + \gamma\zeta$: contra

tra vero, ſi dati circuli extra ſe contingant, i. e. ſi ſit $\iota\zeta = \alpha\iota + \gamma\zeta$, punctum η erit in puncto contactus: denique ſi alteruter circulorum ſecet alterum, vel penitus includat, i. e. ſi $\iota\zeta < \alpha\iota + \gamma\zeta$, punctum η erit intra utrumque circulum. Monſtravimus nempe eſſe hoc caſu $\iota\zeta : \eta\zeta = \alpha\iota + \gamma\zeta : \gamma\zeta$, pariterque oſtendetur, eſſe $\iota\zeta : \iota\eta = \alpha\iota + \gamma\zeta : \alpha\iota$, unde, ſi $\iota\zeta \gtreqless \alpha\iota + \gamma\zeta$; erit etiam $\eta\zeta \gtreqless \gamma\zeta$, et $\iota\eta \gtreqless \alpha\iota$ (14, V.).

2. Cor. Si vero punctum η ſumtum ſit in recta $\iota\zeta$ ultra ζ producta, erit intra utrumque circulum, ſi circulus minor totus poſitus ſit intra majorem, ita, ut ne unum quidem punctum commune habeant, i. e. ſi $\iota\zeta < \iota\alpha - \gamma\zeta$: contra vero, ſi dati circuli intra ſe contingant, i. e. ſi $\iota\zeta = \alpha\iota - \gamma\zeta$, punctum η erit in puncto contactus: denique, ſi circuli ſe invicem ſecent, vel uterque ſit totus extra alterum, i. e. ſi $\iota\zeta > \iota\alpha - \gamma\zeta$, punctum η erit extra utrumque circulum. Oſtendimus nempe, eſſe hoc caſu $\iota\zeta : \eta\zeta = \alpha\iota - \gamma\zeta : \gamma\zeta$, pariterque oſtendetur, eſſe $\iota\zeta : \iota\eta = \alpha\iota - \gamma\zeta : \alpha\iota$, unde, ſi $\iota\zeta \lesseqgtr \alpha\iota - \gamma\zeta$; erit etiam $\iota\eta \lesseqgtr \alpha\iota$, et $\eta\zeta \lesseqgtr \gamma\zeta$ (14, V.).

3. Cor. Eodem modo, quo oſtendimus, rectam quamcunque $\eta\lambda$, quae alterutri circulorum v. c. circulo $\gamma\delta$ in puncto aliquo λ occurrat, occurrere etiam alteri in puncto aliquo μ, oſtendi poterit, ſi recta $\eta\lambda$ circulo $\gamma\delta$ in alio adhuc puncto ν occurrat, occurrere eandem etiam circulo $\alpha\beta$ in alio adhuc puncto π.

4. Cor. Si punctum η ſit extra utrumque circulum, ductaque $\eta\vartheta$ contingat circulum $\gamma\delta$, eadem producta continget etiam circulum $\alpha\beta$.

Franciſci

Francisci Vietae Restitutio

Apollonii librorum II. de Tactionibus,

quam

sub titulo Apollonii Galli edidit Parisiis 1600.

Apollonii Pergaei Problemata περὶ ἐπαφῶν ad decem contraxit Pappus Alexandrinus, quae ideo singula persequar eo, qui convenientior videbitur, ordine.

Probl. I.

Datis tribus punctis, per eadem circulum describere; oportet autem data puncta non existere tria in eadem linea recta.

Redit Solutio ad 1. Schol. 5, IV. Elementorum Euclidis.

Probl. II.

Datis duobus punctis, et linea recta (positione data) per data puncta circulum describere, quem data linea recta contingat.

Figg. 30. 31.

Sint data duo puncta A, B; et data quoque linea recta CZ. Oportet per A, B puncta circulum describere, quem linea recta CZ. contingat. Iungantur A, B.

Fig. 30.

Si igitur AB fuerit ipsi CZ parallela, secabitur AB bifariam, et ad rectos angulos in puncto D à recta secante CZ in C, et cum per puncta A, B, C describetur circulus, quoniam recta CZ ipsi AB est parallela, recta quoque CZ secabitur à DC ad rectos angulos in C. Itaque circulus ABC tangetur à recta CZ in ipso C puncto.

Fig. 31.

Quodsi non fuerit AB ipsi CZ parallela, conveniant ambae in E, secetur autem EZ in C ita, ut, quod fit sub EB, EA aequale sit quadrato ipsius EC, et per puncta A, B, C describatur circulus. Igitur tangetur à recta ECZ per 37, III. Ergo quocunque casu describitur per puncta A, B circulus ABC, quem recta CZ in ipso C puncto contingit. Quod erat faciendum.

Probl. III.

(Positione) datis tribus lineis rectis describere circulum, quem harum unaquaeque contingat. Oportet autem datas lineas rectas non esse (omnes) parallelas.

Redit Solutio ad 4, IV.

Lemma.

Per datum punctum ducere lineam rectam secantem duas datas ad angulos aequales.

Figg. 32. 33.

Sit datum A punctum, datae quoque duae lineae rectae BC, DE. Oportet per A punctum ducere lineam rectam secantem BC, DE ad angulos aequales. (Fig. 32.) Si igitur fuerint parallelae BC, DE, demittatur ab A puncto perpendicularis utrivis ipsarum, utravis secabitur ad angulos aequales, nempe rectos.

Fig. 33.

Fig. 33.

Si non ſint parallelae, convenient. Conveniant igitur in E puncto, et ſecetur angulus DEB bifariam à recta, quam AG ſecet in G ad angulos rectos, rectas vero BE, DE in H, I. Triangula igitur HGE, IGE lateribus et angulis ſunt aequalia, atque adeo anguli, qui ad H, I, aequales. Quod faciendum erat.

Probl. IV.

Datis (poſitione) duabus lineis rectis, et puncto, per datum punctum circulum deſcribere, quem (poſitione) datae duae lineae rectae contingant.

Fig. 34.

Sit datum A punctum, datae quoque duae lineae rectae BC, DE. Oportet per A punctum circulum deſcribere, quem BC, DE contingant. Per A ducatur HI ſecans BC, DE ad angulos aequales, eaque ſecetur bifariam in K, et ipſi AK ponatur aequalis KL, et per A, L puncta deſcribatur circulus, quem altera datarum BC, vel DE contingat. Dico, eundem à reliqua contingi. Contactus enim à BC ſit M, et circuli centrum N, à quo ducatur NO, ſecans DE normaliter in O, et agatur NK. Quoniam igitur ſecatur AL bifariam in K ab ea, quae eſt ex centro, ideo angulus NKI eſt rectus. Connectantur autem NH, NI. Aequales igitur ſunt NH, NI, quoniam perpendiculum triangulis rectangulis NKH, NKI commune NK. Sed et baſis HK baſi KI conſtructa eſt aequalis. Ergo aequales quoque anguli NHM, NIO, cum ſint reſidui poſt ablationem aequalium NHL, NIL ex aequalibus conſtructis MHK, OIK. Similia ſunt igitur triangula rectangula NHM, NIO, ac etiam aequalia, cum ſint aequales ipſorum hypotenuſae. Eſt autem MN ſemidiameter, erit itaque NO quoque ſemidiameter, quam cum ſecet DI ad angulos rectos, ideo DI quoque circu-

 lum

lum ALM continget. Ergo descriptus est circulus AOM per A punctum, quem datae BC, DE in M, O contingunt. Quod erat faciendum.

Probl. V.

Dato circulo, et duabus lineis, describere circulum, quem datus circulus et datae duae lineae rectae contingant.

Figg. 35. 36.

Sit datus circulus, cujus A centrum, datae quoque rectae lineae ZC, DB. Oportet describere circulum, quem circulus, cujus A centrum, et rectae lineae ZC, DB contingant. Cadant in ZC, DB perpendiculares AZ, AD, quae secentur ad easdem partes in punctis X, F, posita unaquaque rectarum ZX, DF aequalibus semidiametro circuli, cujus A centrum, et per X, F agantur XH, FG ipsis ZC, DB parallelae, et per ipsum A centrum describatur circulus posititius AGH, quem actae XH, FG contingant, et sit illius circuli centrum E. Et manifestum est, fore E centrum circuli, quem datus circulus, cujus A centrum, et datae rectae CZ, DB contingent, ob aequalia aequalibus addita, vel adempta undecunque intervalla. Itaque cadat ad angulos rectos EC. Erit ea semidiameter circuli quaesiti.

Probl. VI.

Datis puncto, linea recta, et circulo, per datum punctum describere circulum, quem data linea recta, et datus circulus contingant.

Figg. 37. 38.

Sit datum A punctum, data quoque linea recta BC, ac datus denique circulus DEF. Oportet per A punctum circulum describere, quem recta linea BC, ac circulus DEF contingant. Ex G centro circuli demittatur in BC

per-

ɔerpendicularis DC, fecans ex diametro circulum DEF n punctis D, F, et connectatur DA., quae ita fecetur in I, ut quod fit fub DA, DH, aequale fit ei quod fit fub DC,)F, et per puncta A, H defcribatur circulus, quem recta ontingat in B, et agatur DB fecans circulum DEF in E, t connectatur FE. Rectus eft igitur angulus DEF. Igiur in quadrilatero BEFC anguli oppofiti duobus rectis ınt aequales, rectus enim quoque eft angulus BCF.)uare, quod fit fub DB, DE, aequale eft ei, quod fit fub)F, DC, id eft ex conftructione aequale ei, quod fit fub)A, DH. Sunt igitur puncta A, H, E, B in circulo. Sed eft in circulo DEF. Quare circulus DEF fecat vel tant in E circulum AHEB. Agatur autem BI diameter cirıli. Quoniam is circulus tangitur à recta BC in B erit ıgulus CBI rectus, atque adeo erunt IB, DC parallelae, : cum jungetur IE, fiet angulus IEB rectus, ficut eft anılus DEF. Quare IE, EF coincidunt in eandem lineam ;ctam. Itaque duo fimilia triangula funt DEF, BEI fub ›dem vertice, et ideo circuli ea triangula circumfcribens fefe mutuo contingent in E, non etiam fecabunt (Pap. Lemm. IX.). Igitur per A punctum defcriptus eft cirılus BAE, quem recta BC in B, circulus vero DEF in E ›ntingunt. Quod erat faciendum.

Probl. VII.

Datis duobus circulis, et linea recta, defcribere tertium rculum, quem duo dati, et data linea recta contingant.

Figg. 39. 40. 41.

Sint dati duo circuli, primus, cujus A centrum, fendus, cujus B, et data quoque linea recta CZ. Oport defcribere tertium circulum, quem circuli, quorum B centra, et recta CZ contingant. Cadat in rectam Z perpendicularis BZ, et fecetur in X, ut fit ZX aequa- femidiametro AL ad primum circulum pertinenti, et

a 3 ipfi

ipſi CZ agatur parallela HX, et centro B intervallo BG aequali adgregato vel differentiae ſemidiametrorum primi et ſecundi circuli deſcribatur circulus poſititius. Denique per A punctum deſcribatur circulus AGH, quem poſititius contingat in G, et linea recta HX in H, et ſit ejus E centrum. Et manifeſtum eſt, idem E ſignum fore centrum circuli, quem dati circuli, quorum A, B centra, et data linea recta CZ contingent, ob aequalia ab aequalibus dempta undiquaque vel addita undiquaque intervalla. Itaque demittatur in CZ datam perpendicularis EC, ea erit ſemidiameter circuli LMC, quem circuli, quorum A, B centra, in punctis L, M, et recta CZ in C contingent, habita ea, quam decet parrium ratione. Itaque factum erit quod oportuit

Πτῶσις.

Sic autem habebitur ea, quam decebit, opusve exiget, partium ratio.

I. Fig. 39.

Ut tertium circulum duo dati contingant extra. Primus circulus, cujus A centrum, erit major datorum; ſecundus, cujus B centrum, minor, et erit BG differentia ſemidiametrorum primi et ſecundi; acta vero BX excedet datam CZ, cui eſt perpendicularis.

II. Fig. 40.

Ut tertium circulum duo dati contingant intus. Rurſus circulus, cuius A centrum, erit major datorum, et erit BG differentia ſemidiametrorum, primi et ſecundi, acta vero BX deficiet à data CZ, cui eſt perpendicularis.

III. Fig. 41.

Ut tertium primus contingat intus, alter extra, erit BG adgregatum ſemidiametrorum primi et ſecundi, et acta BX deficiet à data CZ, cui eſt perpendicularis.

Probl.

Probl. VIII.

Datis duobus punctis et circulo, per data duo puncta circulum describere, qui datum contingat.

Figg. 42. 43. 44.

Sint data duo puncta B, D, ac praeterea circulus EFG, cujus A centrum. Oportet per puncta B, D circulum describere, qui circulum GEF contingat. Secetur ita BD in H, ut quod fit fub BD, BH aequale fit differentiae quadratorum AB, AF, et circulum EGF tangat recta HF, et connectatur BF fecans circulum EFG tum in F tum in G, et connectatur quoque DG fecans eundem circulum in E, et per puncta G, B, D defcribatur circulus. Quoniam rectangulum fub BD, BH conftructum eft aequale differentiae quadratorum AB, AF, cui etiam aequale eft id, quod fit fub BG, BF, ideo puncta D, G, F, H funt in circulo, et angulus DGB angulo FHB eft aequalis, ac angulus GDB, id eft connectendo EF, angulus GEF angulo HFB. Uterque igitur, five angulus GEF, five angulus HFB dematur a duobus rectis. Et angulus quidem GEF in triangulo GEF relinquet angulos EGF, EFG; angulus autem HFB in triangulo HFB relinquet angulos FHB, FBH. Erunt igitur anguli EGF, EFG fimul juncti angulis FHB, FBH fimul junctis aequales. Sed angulus EGF angulo FHB oftenfus eft aequalis. Itaque angulus reliquus EFG angulo reliquo FBH erit aequalis, atque adeo fimilia erunt triangula GDB, GEF fub eodem vertice. Unde defcripti circuli duo, unus per puncta G, E, F, alter per puncta G, D, B fefe contingent in G communi vertice. (Pappi Lemm. IX.) Defcriptus igitur eft per D, B puncta circulus DBG, circulum GEF tangens in G. Quod erat faciendum.

Lemma I. Figg. 45. 46.

Propofitis duobus circulis, invenire punctum in jungente ipforum centra, à quo cum ducetur quaevis linea recta ipfos circulos fecans, fimilia erunt fegmenta.

Proponantur duo circuli ABC, EFG, et fit primi centrum K, fecundi L, et jungatur KL. Oportet in KL invenire punctum, à quo cum ducetur quaevis linea recta circulos ABC, EFG fecans, fimilia erunt fegmenta. Secetur KL, vel producatur in M, ut fit KM ad LM ficut AK ad EL. Dico, cum à puncto M ducetur linea recta circulos ABC, EFG fecans, fimilia fore ipforum fegmenta. Agatur enim quaevis MGFCB fecans circulum ABC in punctis B, C circulum vero EFG in punctis F, G, et fint puncta fectionum B, F ad easdem partes, utpote remotiora ab ipfo M puncto, puncta vero C, G eidem M figno propiora, et connectantur BK, CK, FL, LG. Itaque conftituuntur duo triangula BKC, FLG. Quoniam igitur eft KM ad LM ex conftructione, ficut KB ad FL, erunt BK, FL parallelae, et angulus KBC angulo LFG aequalis. Aeque, quoniam KM ad LM ex conftructione eft, ficut KC ad LG, erunt KC, LG parallelae, et angulus KCB angulo LGF aequalis. Quare et angulus reliquus BKC id eft circumferentia BC, angulo reliquo FLG, id eft circumferentiae FG eft aequalis. Atque adeo BC, FG fimilia circulorum, ad quos pertinent, fegmenta. Propofitis igitur duobus circulis ABC, EFG inventum eft in KL jungente ipforum centra punctum M, à quo cum ducetur quaevis recta linea ipfos fecans, fimilia erunt fegmenta. Quod faciendum erat.

Lemma II. Figg. 45. 46.

Sint duo circuli unus ABCD, alter EFGH; jungens autem eorum centra KL fecet circulum primum in A, D; fecundum vero in E, H; et in ea fumatur M punctum, à

quo

quo acta MGFCB recta secet circulum primum in B, C, secundum in F, G, et sint similia segmenta, et puncta quidem sectionum A, B sint remotiora ipsis C, D, et puncta F, E ipsis G, H. Ajo, id quod fit sub MG, MB aequari ei, quod fit sub MH, MA.

Cadant enim ex centris K, L in subtensas BC, FG perpendiculares KR, LS, et connectantur semidiametri KC, LG. Quoniam igitur BC, FG proponuntur similia suorum circulorum segmenta, RC vero et SG sunt semisses subtensarum BC, FG, ideo similia sunt triangula KRC, LSG, et parallelae KC, LG, atque adeo anguli CKD, GLH similes, ac denique subtensae eorum amplitudini CD, GH parallelae. Quare, ut est MD ad MC, ita MH ad MG. Sed MD ad MC est, ut MB ad MA. Et ideo, quod fit sub MB, MG, ei quod fit sub MA, MH est aequale. Iisdem positis, Ajo eadem ratione, id quod fit sub ME, MD, aequari ei, quod fit sub MF, MC.

Quoniam enim EFGH est in circulo, ideo est MH ad MG, sicut MF ad ME. Sed MH ad MG est, sicut MD ad MC. Ergo est MF ad ME sicut MD ad MC, et ideo quod fit sub ME, MD, ei quod fit sub MF, MC est aequale.

Probl. IX.

Datis duobus circulis, et puncto, per datum punctum circulum describere, quem duo dati circuli contingant.

Figg. 47. 48. 49.

Sint dati duo circuli, unus ABCD, alter EFGH, et praeterea datum I punctum. Oportet per I punctum circulum describere, quem circuli ABCD, EFGH contingant. Circulorum ABCD, EFGH jungantur centra K, L, et in KL inveniantur ex antecedente, quod primo loco praemissum est, Lemmate, M punctum, à quo cum ducentur rectae lineae secantes circulos ABCD, EFGH, simi-

ſimilia ſint ſegmenta. Ipſa vero KL ſecet ex diametro circulum ABCD in ſignis A, D, circulum vero EFGH in ſignis E, H, et ita ſecetur MI in N, ut quod fit ſub MI, MN aequale ſit ei, quod fit ſub MH, MA, et per I, N puncta deſcribatur circulus, qui à circulo ABCD tangatur. Id enim jam docuit Problema octavum. Et ſit contactus in B, et connectatur BM ſecans circulum ABCD in B, C, circulum vero EFGH in F, G. Quod fit igitur ſub MG, MB aequale eſt ei, quod fit ſub MH, MA id eſt ex conſtructione ei, quod fit ſub MN, MI ex antecedente, quod ſecundo loco poſitum eſt, Lemmate. Quare puncta N, I, B, G ſunt in eodem circulo. Sed punctum G eſt quoque in circulo EFGH. Quare circuli EFGH, IBGN ſeſe mutuo ſecant, vel contingunt in G. At vero ſeſe contingunt circuli BNI, BCD in B ex conſtructione. Unde ſegmentum BG ſimile eſt ſegmento BC. Itaque ſegmentum FG erit ſimile ſegmento BG. Quare circuli EFG, IBG ſeſe contingunt in G, non etiam ſeſe mutuo ſecabunt. (Demonſtraverat nempe Vieta in Lemmate aliquo, ſi duo circuli ſe mutuo ſecent, rectam à puncto ſectionis ductam ad utrumque circulum, diſſimilia inde abſcindere ſegmenta, quod Lemma, quum facile ex Lemm. IX. Pappi deduci poſſit, brevitatis ſtudio omiſimus.) Deſcriptus eſt igitur per I punctum circulus IGB. quem circuli ABD, EGH contingunt in B, G, Quod erat faciendum.

Probl. X.

Datis tribus circulis, deſcribere quartum circulum, quem illi contingant.

Figg. 51. 52. 53. 54.

Sint dati tres circuli, quorum primi centrum A, ſecundi B, tertii D. Oportet deſcribere circulum quartum, quem illi contingant. Centro D intervallo DF differentia vel adgregato ſemidiametrorum primi et tertii deſcribatur

batur circulus posititius unus. Et centro B, intervallo BG differentia vel adgregato semidiametrorum circuli primi et secundi describatur posititius alter. Denique per A punctum describatur circulus AGF quem posititii contingant in punctis G, F, et sit circuli illius centrum E. Et manifestum est, ipsum E signum fore quoque centrum circuli, quem dati contingent, ob aequalia aequalibus dempta undiquaque, vel undiquaque addita intervalla. Itaque ducatur ab eo puncto E recta per centrum alicujus datorum ad ipsius dati circumferentiam, habita ea, quam decebit, opusve exiget, partium in positionibus ratione, et intervallo EH describatur circulus HLM, factum erit, quod oportuit. Sic autem habebitur ea, quam decebit, opusve exiget, partium ratio.

I. Fig. 51.

Ut quartus à datis tangatur intus. Sit A centrum maximi datorum, B medii, D minimi, DF differentia, qua semidiameter maximi superat semidiametrum minimi, BG differentia, qua semidiameter maximi superat semidiametrum medii, et per A punctum describatur circulus, quem posititii extra contingant.

II. Fig. 52.

Ut quartus à datis tangatur extra. Sit rursus A centrum maximi, B medii, D minimi, DF differentia, qua semidiameter maximi superat semidiametrum minimi, BG differentia, qua semidiameter maximi superat semidiametrum medii, et per A punctum describatur circulus, quem posititii intus contingant.

III. Fig. 53.

Ut quartus à primo tangatur intus, et à secundo et tertio extra. Sit DF adgregatum semidiametrorum primi

mi et tertii, BG adgregatum semidiametrorum primi et secundi. Et per A punctum describatur circulus, quem positi extra contingant.

IV. Fig. 54.

Ut quartus à primo tangatur extra, et à secundo et tertio intus. Sit rursus DF adgregatum semidiametrorum primi et tertii, BG adgregatum semidiametrorum primi et secundi, et per A punctum describatur circulus, quem positi intus contingant.

Observationes Editoris in Restitutionem Vietae.

Ita quidem Vieta restituit Apollonii libros. Et quamvis casus praecipuos mira elegantia persecutus sit, quin tamen rem omnem penitus eum absolvisse putemus, impediunt ea, quae in Historia Problematis diximus. Ne vero temere ea dixisse videamur, quibusdam certe exemplis ostendemus, praeter Analysin, quae nusquam apud Vietam reperitur, plenam etiam Casuum enumerationem, justamque Problematum Determinationem apud eum desiderari. Casuum enumerationem mancam esse, illius jam Problematis quod apud Vietam secundum est, Tractatio satis ostendit. Quum enim Vieta jubeat (Fig. 31.) rectam EZ in C secare ita, ut, quod fiat sub EB, EA aequale sit quadrato ipsius EC, monendum erat, rectam EZ ab utraque parte puncti E secari posse, atque per utramque sectionem circulum inveniri, qui conditionibus Problematis satisfaciat. Vietam id sane non fugiebat: at explicatius dicere debebat. Apollonium certe diversas, quae alicui Problemati satisfaciunt, Solutiones separatim tractasse, patet vel maxime ex Lemmate X comparato cum XII. pariter-

riterque ex Lemmate XIII. comparato cum XIV, quorum Lemma X à XII eo tantum differt, quod recta $\alpha\gamma$, quae in Lemmate X jungit rectas $\delta\beta$, $\varepsilon\beta$ productas, in Lemmate XII contra ducenda est, antequam inter se conveniant; Lemma XIII vera à XIV eo tantum, quod recta $\beta\gamma$, quae in eorum uno supra $\delta\varepsilon$ ducenda est, in altero duci debet infra $\delta\varepsilon$. Quodsi quis vero Vietam putet rem satis indicasse, dum non determinaverit, ex utra puncti E parte secanda sit recta EZ, adeoque utramvis partem eligere liberum reliquerit, ego quidem pertinacius disputare nolim. At illud saltim necessario monendum erat, alium adhuc Casum superesse, qui alia prorsus Solutione opus habeat, eum nempe, quo punctorum A, B alterum situm est in ipsa recta CZ. Caeterum facillima est hujus quoque casus Solutio. Si enim punctorum A, B alterum v. g. A positum sit in ipsa recta CZ, erit vel AB perpendicularis ad CZ, vel non. Priore casu patet, ipsam AB esse circuli describendi diametrum. Posteriore, recta AB bifariam divisa in D, ductaque ex D recta ad AB perpendiculari DF, pariterque ex A recta ad CZ perpendiculari AF, facillime demonstratur, rectas DF, AF in puncto aliquo F inter se convenire, et circulum centro F radio AF descriptum eum esse, qui describendus erat. Praeterea vero in eodem Problem. Viet. II. opus adhuc erat Determinatione. Nempe, si unum punctorum datorum situm sit in ipsa recta CZ, alterum in eadem recta esse non potest. Si vero neutrum punctorum datorum sit in recta CZ, haec recta CZ non transire potest inter duo puncta data, sed eorum utrumque ex eadem sui parte habeat necesse est.

Fig. 34.

Eadem fere monenda sunt de Problemate Viet. IV. Praetermissus est enim ille Casus, quo punctum datum situm

ſitum eſt in altera rectarum poſitione datarum, qui ſi rectae poſitione datae ſint inter ſe parallelae, unam ſaltim, ſi non ſint parallelae, duas admittit Solutiones. Deinde, ſi forte punctum datum poſitum ſit in media recta HI, quae eas, quae poſitione datae ſunt, ad angulos aequales ſecat, adeoque cum punctis K, L coincidat, nulla eſt Vietae Solutio. Denique monendum erat, duas Problema admittere Solutiones, prouti nempe circulus deſcribatur, qui ex una, vel ex altera parte rectae HI rectas poſitione datas contingat. Determinatione pariter opus erat. Si enim rectae poſitione datae ſint inter ſe parallelae, punctum datum aut inter has rectas interjacere, aut in alterutra earum poſitum eſſe debet: ſi non ſint parallelae, punctum datum non debet coincidere cum puncto, in quo rectae poſitione datae inter ſe conveniunt. Haec vero, quamvis levia ſint, eo minus tamen praetermittenda erant, quod ſequentia ſemper Problemata ad praecedentia reducuntur, adeoque, ſi quae in prioribus manca relinquuntur, eadem et in poſterioribus, ubi omnia magis compoſita fiunt, majorem facile pariunt difficultatem, quod ipſum ex Problemate Viet. Vto comparato cum IVto, ad quod reducitur, ſatis patebit. Neque vero in hoc Problemate, ejusque diverſis Caſibus accuratius examinandis, aut Determinationibus neceſſariis afferendis longior ero, quum ex diligenti eorum, quae ad Problema IV. dixi, ad noſtrum hoc Vtum applicatione omnia ſponte fluant. Unum moneo, Vietam ſine idonea ratione promiſcue ſumtis omnibus caſibus rectas AZ, AD ad easdem partes ſecari jubere in punctis X, F quod ſine dubio ita intellexit, ut, ſi in recta AZ ſumatur ZX ex ea rectae ZC parte, ex qua eſt punctum A (ſiquidem id non ſit in ipſa ZC) ſumatur etiam in recta AD pars DF ex ea rectae DB parte, ex qua eſt punctum A (ſiquidem id non ſit in ipſa

ſa recta DB), et contra. Facile enim patet, poſſe nonnunquam, etiam ſi (Fig. 55.) recta ZX ſit ex eadem parte rectae ZC, ex qua eſt A, recta autem DF non ex eadem parte rectae DB, ex qua eſt A, circulum deſcribi, qui per punctum A tranſeat, rectasque XH, FG contingat, atque ex eodem centro alium, qui circulum, cujus centrum eſt A, rectasque CZ, BD contingat. Nempe illud quidem requiritur, ut puncti E ſitus ratione rectarum CZ, HX ſimilis ſit ſitui, quem habet ratione rectarum BD, GF; de puncto A vero idem non neceſſario requiritur. Unde patet, poſſe quibusdam certe caſibus ad utrasvis rectarum BD, CZ partes duci parallelas GF, gf; HX, hx, atque utramvis earum, quae BD rectae parallelae ſunt, conjunctim ſumi cum utravis earum, quae rectae CZ parallelae ſunt, quo itaque quatuor omnino parallelarum paria efficiuntur, quorum quum ſingula à duobus circulis contingi poſſint, qui ſimul per punctum A tranſeant, ut ad Probl. Viet. IVtum vidimus, his caſibus octo circuli deſcribi poterunt, qui Problemati Vto ſatisfaciant. Alii vero caſus ſunt, qui pauciores tantum Solutiones admittunt, quae omnia in pleniore librorum Apollonii reſtitutione accuratius diſtingui debebant. In Problemate VIto omiſſi ſunt Caſus, quibus punctum A datum poſitum eſt vel in recta BC poſitione data, vel in circulo DEF poſitione dato. Deinde puncta A, H à ſe invicem diverſa eſſe ponuntur, quod non ſemper fiet: poteſt enim nonnunquam quadratum ex AD aequale eſſe ei, quod ſit ſub DC, DF. Plures etiam Caſus quibus recta poſitione data contingit circulum poſitione datum, diverſam à Vietana exigunt Solutionem. Enumeratio etiam circulorum, qui quovis Caſu Problemati ſatisfaciunt, variaeque pro diverſis Caſibus Determinationes deſiderantur. In Problemate VIImo, praeter ea, quae ad VItum diximus, ad

quod

quod hoc VIImum reducitur, desiderantur Casus, quibus circuli positione dati ex eodem centro descripti sunt. Plura, quae ad pleniorem Enumerationem Casuum, ac Determinationem in hoc Problemate, ac sequentibus pertinent, afferre spatii angustia non permittit. Problematis tamen VIIIvi, ad quod pariter plura monenda forent, eo lubentius Casum aliquem praecipuum uberius explicatum subjungo, quod sequentia etiam duo Problemata ad VIIIvum reducuntur. Quum vero etiam calculum addere propositum sit, isque omnis ad calculum Problematis I. redeat, de eo primum videbimus. Quodsi igitur (Fig. 31.) per data tria puncta A, B, C non in eadem recta posita descriptus sit circulus, ducatur ex uno eorum, v. g. ex puncto C, diameter CG, et jungatur AG, eritque angulus CAG rectus (31, III.), angulus autem CGA = CBA (21, III.). Itaque

CG : AC = sin tot : sin ABC, adeoque erit posito sinu toto = 1, $CG = \frac{AC}{\sin ABC}$, et radius $FC = \frac{AC}{2 . \sin ABC}$. Eadem ratione obtinebimus $FC = \frac{BC}{2 . \sin BAC} = \frac{AB}{2 . \sin ACB}$.

Quodsi alia Data ponantur, v. g. rectae AB, BC, AC, formulae hae aliter exprimentur. Nempe, quum sit

$$\sin ABC = \left[\sqrt{(AB + AC + BC)(AB + AC - BC)} \right.$$
$$\left. (AB + BC - AC)(AC + BC - AB) \right] : 2 AB . BC,$$

erit

$$FC = AB . AC . BC : \left[\sqrt{(AB + AC + BC)} \right.$$
$$\left. (AB + AC - BC)(AB + BC - AC)(AC + BC - AB) \right]$$

vel, si data sint duo trianguli ABC latera, v. g. AB, AC cum angulo A, quem comprehendunt, erit

FC

$$FC = \frac{\sqrt{(AB^2 + AC^2 - 2\,AB.\,AC.\,\text{cosin}\,A)}}{2\,\text{sin}\cdot A}.$$

His praemissis propositus jam sit Problematis Vietani VIIIvi Casus is, (Fig. 44.) quo describendus est circulus, qui circulum EFG positione ac magnitudine datum extra contingat, et per duo data puncta B, D, quorum neutrum sit in circumferentia circuli dati, transeat.

Analysis.

Puta factum, et circulus, cujus centrum est I, ac radius IB (circulus I) per alterum etiam punctum datum D transeat, et circulum datum, cujus centrum est A (circulum A) in puncto G extra contingat. Ducatur recta GK contingens utrumque circulum in G (7 Cor. Lemm. E), eruntque circuli A, I è diversis rectae GK partibus (id. Cor.): proinde etiam punctum B et circulus A è diversis rectae GK partibus sunt, pariterque punctum D et circulus A è diversis partibus rectae GK erunt. Ductae igitur rectae BG, DG, atque ultra G productae, circulo A iterum in punctis quibusdam F, E occurrent (Lemm. L.) Quo facto jungantur rectae EF, BD, quae inter se parallelae erunt (Lemm. VII. pertinens ex inscriptione sua ad Probl. XVI, quod indicio est, ut hoc obiter dicamus, Casum hunc particularem Problematis Vietani VIII. fuisse apud Apollonium Problema XVI.). Nostrum igitur Problema eo redit: Circulo A positione ac magnitudine dato, datisque extra ipsum duobus punctis B, D: inflectere ex his punctis ad punctum aliquod G in circulo A rectas BG, DG, ita, ut productae iterum occurrant circulo in punctis quibusdam F, E, junctaque FE parallela sit ipsi AD i. e. ad Lemma M vel Pappi Lemma X. Invento enim hac ratione puncto G, circulus describendus erit, qui per

 data

data tria puncta B, D, G transſeat. Id vero oſtenſum fuit 1. Schol. 5, IV.

Determinatio.

Facile patet, utrumque punctum B, D extra circulum A eſſe debere. Quum enim utrumque punctum B, D eſſe debeat in circumferentia circuli I, et tamen neutrum eorum cum puncto G coincidere poſſit, poſito quippe in circumferentia circuli A, in qua, ex hypotheſi, noſtro Caſu neutrum punctorum B, D eſſe debet, atque omnia reliqua puncta circuli I ſint extra circulum A (Lem. F.): etiam puncta B, D neceſſario extra circulum A eſſe debent. Praeterea, ſi juncta BD etiam producta circulo A nuſquam occurrat, ex Determinatione Lemmatis M unum ſemper punctum G inveniri, adeoque unus ſemper circulus I deſcribi poterit. Si vero juncta BD circulo A occurrat, ſintque puncta B, D è diverſis circuli A partibus, Problema nullam admittet Solutionem ex eadem Determinatione. Denique, ſi juncta BD producta circulo A occurrat, ſintque B, D ex eadem parte circuli A, duo puncta G, g Lemmati M, adeoque duo circuli I, i noſtro huic Problemati ſatisfacient, ſi nempe recta BD producta circulum ſecet; unum vero tantum punctum G, adeoque unus tantum circulus I locum habebit, ſi BD producta circulum A contingat. Unde patet, eo Caſu, quo recta BD circulo A occurrit, puncta B, D non eſſe poſſe è diverſis hujus circuli partibus.

Compoſitio.

Inveniatur ex Lemmate M in circulo dato A, punctum G, vel ſi locum habeat, aliud adhuc punctum g tale, ut rectae BG, DG productae circulo A iterum occurrant in punctis quibusdam F, E, pariterque, ſi punctum g locum habeat, rectae Bg, Dg productae occurrant circulo

culo A iterum in punctis quibusdam f, e, fitque recta FE, et, fi locum habeat, etiam recta fe parallela ipfi BD. Denique circa puncta D, B, G defcribatur circulus I, et, fi punctum g locum habeat, etiam circa puncta D, B, g defcribatur circulus i (1. Schol. 5, IV.): dico, circulum I circulum A in puncto G contingere, et, fi circulus i locum habeat, etiam circulum i circulum A in puncto g contingere.

Demonftratio.

Quum enim Cafibus in Determinatione indicatis femper duci poffit recta FE, vel etiam recta fe parallela ipfi BD (Lemm. M.); recta BF, et fi locum habeat, recta Bf, nunquam cum recta BD coincidet, adeoque punctum G, et fi locum habeat, etiam punctum g nunquam in recta BD erit. Semper itaque circa puncta B, D, G, et fi g locum habeat, etiam circa puncta B, D, g defcribi poterit circulus I vel i (1. Schol. 5, IV.). Quo facto, cum FE parallela fit ipfi BD, vel etiam fe parallela ipfi BD, circulus I, vel etiam circulus i circulum datum A in G vel g extra continget (Lemm. IX.) quia nempe rectae GF, GB, vel etiam gf, gB ex conftructione è diverfis partibus puncti G vel g fitae funt.

Computatio.

Ex Computatione Problematis Viet. I. habemus IB $= \frac{BD}{2.\sin BGD}$, pariterque, fi locum habeat iB $= \frac{BD}{2.\sin BgD}$. Sinum autem anguli BGD, vel BgD facile colligere licet ex Computatione Lemmatis M. Nempe, fi recta BD producta tranfeat per centrum A, erit ex iis, quae ad Lemm. M. vidimus:

$$\sin BGD = \sin BgD = \frac{AE.\,BD}{AB.\,AD - AE^2},$$ adeoque

$$IB = iB = \frac{AB.AD - AE^2}{2\,AE} = \tfrac{1}{2}\,\frac{AB.\,AD}{AE} - \tfrac{1}{2}\,AE.$$

Si vero BD producta non tranſeat per centrum A, ac demittatur ex A ad rectam BD perpendicularis AL, ac punctum H in recta BD, ſi opus ſit, producta, ſumatur ita, ut $DB \times BH = AB^2 - AE^2$ et ex H ducatur ad circulum A tangens HF, atque appelletur ſimiliter ac in Computatione Lemmatis M, $AE = R$, $AL = P$, $LH = BH \sim BL = S$, et $HF = T$; erit

$$\sin BGD = \frac{P^2 - R^2}{P.T \mp S.R},$$ ubi in Denominatore ſignum − ſumendum erit, ſi $BH > BL$, contra vero ſi $BH < BL$, ſumendum erit ſignum +, vel ſubſtitutis loco quantitatum P, R, S, T earum valoribus, rectis BD, BA, DA, et EA expreſſis, erit ſemper ſin BGD

$$= \Big[\big((AB+AD)^2 - BD^2\big)\big(BD^2 - (AB-AD)^2\big) - 4BD^2.\,AE^2\Big]$$
$$: 2\Big[\sqrt{(BA^2 - EA^2)(DA^2 - EA^2)\big((BA+DA)^2 - BD^2\big) \times \big(BD^2 - (BA-DA)^2\big)}$$
$$+ EA.\,BD\,(2\,EA^2 + BD^2 - AB^2 - AD^2)\Big]$$

Itaque
$$IB = \Big[EA.\,BD^2\,(2.EA^2 + BD^2 - AB^2 - AD^2)$$
$$+ BD.\sqrt{(AB^2 - EA^2)(AD^2 - EA^2)\big((AB+AD)^2 - BD^2\big) \times \big(BD^2 - (AB-AD)^2\big)}\Big]$$
$$: \Big[\big((AB+AD)^2 - BD^2\big)\big(BD^2 - (AB-AD)^2\big) - 4BD.^2\,EA^2\Big]$$

Formula haec ſemper radium IB determinabit, niſi forte ſit $P = R$, quod ſit, ſi recta BD producta circulum tangat. Tum enim, quia $R^2 + T^2 = P^2 + S^2$, erit etiam $T = S$, adeoque formula ſin $BGD = \frac{P^2 - R^2}{PT - SR}$ indeterminata erit. Eo vero Caſu alteram formulam Lemmatis M. adhi-

adhibere possumus, ex qua $\sin BGD = \frac{PS + RT}{PR + ST}$, quae hoc casu evadit $\sin BGD = \frac{2\,RT}{R^2 + T^2}$, vel $\sin BGD$

$$= \frac{2\,BD.\,EA\,\sqrt{(AB^2 - EA^2)(AD^2 - EA^2)}}{BD.^2 EA^2 + (AB^2 - EA^2)(AD^2 - EA^2)}$$, adeoque

$$IB = \frac{BD.^2 EA^2 + (AB^2 - EA^2)(AD^2 - EA^2)}{4 EA\,\sqrt{(AB^2 - EA^2)(AD^2 - EA^2)}}.$$

Quodsi alius adhuc angulus BgD locum habeat, erit ex Comput. Lemm. M: $\sin BgD = \frac{R^2 - P^2}{PT + SR}$

$$= \left[4\,BD.^2 EA^2 ((AB + AD)^2 - BD^2)(BD^2 - (AB - AD)^2)\right]$$

$$: 2\Big[\sqrt{(AB^2 - EA^2)(AD^2 - EA^2)((AB + AD)^2 - BD^2)} \times (BD^2 - (AB - AD)^2) - EA.BD(2\,EA^2 + BD^2 - AB^2 - AD^2)\Big],$$

adeoque $iB =$

$$BD\Big[\sqrt{(AB^2 - EA^2)(AD^2 - EA^2)((AB + AD)^2 - BD^2)} \times (BD^2 - (AB - AD)^2) - EA.BD(2\,EA^2 + BD^2 - AB^2 - AD^2)\Big]$$

$$: \left[4\,BD.^2 EA^2 ((AB + AD)^2 - BD^2)(BD^2 - (AB - AD)^2)\right]$$

Quodsi quaeratur recta IO perpendicularis ad BD, adeoque rectam BD bifariam secans, erit $IO : \frac{1}{2} BD = \sin. tot : tang\ BGD$, adeoque $IO = \frac{BD}{2.\,tang\ BGD}$ i. e. ex Lemmate M: $IO = \frac{BD\,(PS - RT)}{2\,(P^2 - R^2)}$ vel $IO = \frac{BD\,(RT - PS)}{2\,(R^2 - P^2)}$.

Comparantibus facile patebit, Newtoni formulam (Arithm. Univ. Probl. XLV.) ad hanc formam reduci posse. Si alia

Data ponantur, v. g. ſi data ſit BO = ½ BD, AO, EA, atque angulus AOD, ſubſtitutis loco quantitatum P, R, S, T earum valoribus, quas ſecundum Computationem Lemmatis M ad finem habere debent, novam pro radio IB formulam obtinebimus, ad quam reduci poteſt Solutio Thom. Simpſon (Elém de Géom. Probl. XLII.)

Simili jam ratione reliqui etiam Caſus Problematis Viet. VIIIvi (ſi etiam diſceſſero ab iis Caſibus, quibus alterum punctorum datorum eſt in circumferentia circuli dati, utpote qui alia tractatione opus habent) ii nempe, quibus circulus deſcribendus vel à circulo dato intus contingi; vel circulum datum intus et quidem ab utravis rectae BD parte contingere debet, tractandi erant in Analyſi, Determinatione, Compoſitione ac Computatione. Nova tamen Computatione non opus eſt, ſi obſervetur, radium circuli alicujus, qui alterum intra contingat, relatum ad radium alterius hujus circuli ad punctum contactus ductum, ſitum eſſe modo prorſus contrario ei, quo ſitus erat, quum alterum illum circulum extra contingeret, adeoque ſignum iſtius radii in contrarium mutari debere. Quod quum ita ſit, eo Caſu, quo circulus deſcribendus à circulo dato intus contingitur, i. e. quo circulus datus circulum deſcribendum intus contingit, (Fig. 42.) ſignum circuli dati in contrarium mutari debet, adeoque ſi unus tantum circulus deſcribi poſſit, i. e. ex Determ. Lemm. N. ſi recta BD etiam producta non tranſeat per circulum datum, erit radius circuli deſcribendi IB =

$$BD\left[\sqrt{(AB^2 - EA^2)(AD^2 - EA^2)\left((AB + AD)^2 - BD^2\right) \times \left(BD^2 - (AB - AD)^2\right)} - EA.BD\,(2\,EA^2 + BD^2 - AB^2 - AD^2)\right]$$

$$: \left[\left((AB + AD)^2 - BD^2\right)\left(BD^2 - (AB - AD)^2\right) - 4\,BD^2\,EA^2\right]$$

Si

Si vero duo circuli Problemati satisfaciant, i. e. ex Lemm. N, si recta BD producta circulum datum secet, sintque puncta data è diversis circuli dati partibus, erit radius unius circuli describendi IB idem, quem modo diximus, radius autem alterius i B =

$$BD\Big[\surd\big((AB^2-EA^2)(AD^2-EA^2)((AB+AD)^2-BD^2)$$
$$\times(BD^2-(AB-AD)^2)\big)$$
$$+EA.BD\,(2\,EA^2+BD^2-AB^2-AD^2)\Big]$$
$$:\Big[4\,BD.^2\,EA^2-((AB+AD)^2-BD^2)(BD^2-(AB-AD)^2)\Big]$$

Denique eo casu (Fig. 43.) quo circulus describendus circulum datum intus contingere debet, quod semper duplici modo, nempe ab utravis parte rectae BD fieri potest, siquidem, ut hoc Casu fieri debet, utrumque punctorum B, D sit intra circulum datum, in formulis pro Casu, quo circuli, describendus et datus se extra contingunt, mutari debet signum radii circuli describendi in contrarium, adeoque erit radius unius circulorum describendorum IB =

$$BD\Big[EA.\,BD\,(2\,EA^2+BD^2-AB^2-AD^2)$$
$$+\surd\big((AB^2-EA^2)(AD^2-EA^2)((AB+AD)^2-BD^2)$$
$$\times(BD^2-(AB-AD)^2)\big)\Big]$$
$$:\Big[4\,BD.^2\,EA^2-((AB+AD)^2-BD^2)(BD^2-(AB-AD)^2)\Big]$$

et radius alterius iB =

$$BD\Big[EA.\,BD\,(2\,EA^2+BD^2-AB^2-AD^2)$$
$$-\surd\big((AB^2-EA^2)(AD^2-EA^2)((AB+AD)^2-BD^2)$$
$$\times(BD^2-(AB-AD)^2)\big)\Big]$$
$$\Big[4\,BD.^2\,EA^2-((AB+AD)^2-BD^2)(BD^2-(AB-AD)^2)\Big]$$

 Quum

Quum Praeceptorem olim meum, aeternum pie venerandum, Doctissimum *Pfleiderer*, Matheseos in Academia Tubingensi Professorem de consilio quod tum ceperam, Apollonii plenius restituendi certiorem fecissem, eique primam earum, quas hic exhibui, formularum misissem, Vir humanissimus formulam cum mea consentientem, at alia methodo erutam, simulque quam plurimas ejusdem Variationes, quas subit, si alia Data ponantur, ad me transmisit, è quibus nonnulla certe, quae et simplicitate sua se maxime commendant, et in sequentibus usui erunt, hic addam. Omnia vero pro eo saltim Casu afferam, quo circuli, describendus ac datus, extra se contingere debent, quae deinde ex iis, quae vixdum dixi, ad reliquos Casus facile applicari poterunt. Ita, quum sit $AL^2 = \frac{((AB+AD)^2 - BD^2)(BD^2 - (AB-AD)^2)}{4\,BD^2}$, erit eo Casu

$$IB = \left[EA\left(EA^2 + \frac{BD^2 - AB^2 - AD^2}{2}\right) + AL\sqrt{(AB^2 - EA^2)(AD^2 - EA^2)}\right] : 2\left[AL^2 - EA^2\right]$$

et

$$iB = \left[AL\sqrt{(AB^2 - EA^2)(AD^2 - EA^2)} - EA\left(EA^2 + \frac{BD^2 - AB^2 - AD^2}{2}\right)\right] : 2\left[EA^2 - AL^2\right]$$

Et has quidem formulas immediate ex Calculo suo derivat Vir Doctissimus, easque, quas supra dedi, inde deducit. Porro si datae sint rectae BL, DL, AL et radius EA, ob

$$BD^2 = BL^2 + DL^2 + 2\,BL \times DL \text{ (Elem. 4, II.)}$$

$$\text{et } AB^2 = AL^2 + BL^2$$

$$AD^2 = AL^2 + DL^2$$

---

adeoque $BD^2 - AB^2 - AD^2 = 2\,BL \times DL - 2\,AL^2$.

erit

$$\text{erit } IB = \left[EA\,(EA^2 + BL \times DL - AL^2) + AL \sqrt{(AL^2 + BL^2 - EA^2)(AL^2 + DL^2 - EA^2)}\right] : 2\left[AL^2 - EA^2\right]$$

$$= \left[AL \sqrt{(BL^2 + AL^2 - EA^2)(DL^2 + AL^2 - EA^2)} - EA\,(AL^2 - EA^2 - BL \times DL)\right] : 2\left[AL^2 - EA^2\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} AL \sqrt{1 + \frac{BL^2 + DL^2}{AL^2 - EA^2} + \frac{BL.^2\,DL^2}{(AL^2 - EA^2)^2}} - \tfrac{1}{2} EA \left(1 - \frac{BL.\,DL}{AL^2 - EA^2}\right)$$

et similiter determinabitur iB.

Si praeter radium EA dantur AB, BD, et angulus ABD $= \beta$, ob sin. tot: sin β = BA : AL et $2\,AB \times BD \times \text{cosin}\,\beta = 2\,AB^2 + BD^2 - AD^2 - AB^2$

$$\text{erit } IB = \left[EA\,(EA^2 + AB.\,BD.\,\text{cosin}\,\beta - AB^2) + AB.\,\text{sin}\,\beta.\sqrt{(AB^2 - EA^2)(BD^2 + AB^2 - EA^2 - 2\,AB.BD\,\text{cos}.\,\beta)}\right]$$

$$: 2\left[AB.^2\,\text{sin}\,\beta^2 - EA^2\right]$$

Hactenus ex schedis Doctissimi *Pfleiderer*.

In Problemate Vietano IX omissi sunt Casus, quibus duo circuli dati ex eodem centro descripti sunt. Ii deinde Casus, quibus punctum datum positum est in circumferentia alterius circulorum datorum, vel quibus dati circuli sunt inter se aequales, vel denique, quibus circuli dati se invicem contingunt, peculiarem nonnunquam requirunt Solutionem. Praeterea in iis ipsis Casibus, quibus Solutio Vietae generatim quidem applicari potest, per singularem Datorum inter se habitum fieri potest, ut

puncta I, N, quorum diversitate nititur Vietae Solutio, coincidant. Caeterum etiam hic Casuum enumeratio, variaeque Determinationes prorsus desunt. Liceat itaque speciminis gratia unum iterum hujus Problematis Casum plenius evolvere, eum nempe (Figg. 49. 50.) quo describendus est circulus, qui duos circulos inaequales ADC (cujus centrum K), EGF (cujus centrum L) positione ac magnitudine datos, neque se invicem intra contingentes, extra contingat, et per punctum datum I, quod non positum sit in circumferentia alterutrius circulorum datorum, transeat.

Analysin

primum eam dabo, qua Apollonius usus esse videtur, deinde aliam Vietae Solutioni accommodatiorem, et ex mea opinione reapse simpliciorem. (Fig. 49.) Puta igitur factum, et circulus centro O radio OI descriptus contingat extra circulos datos ADC, EGF (quorum illum majorem, hunc minorem esse ponamus) in punctis B, G, et ducantur rectae KBO, LGO (Lemm. III.), et quum sit $OB = OG$, at $OK > OL$, ducta BG conveniet producta cum ducta KL (Lemma XXI.). Conveniat in M, et recta BGM necessario secabit circulum ADC in alio quodam praeter B puncto, v. c. in C. Nisi enim secet, tanget in B, adeoque perpendicularis erit ad rectam KBO (18, III.), unde, quum $OGB = OBG$ (5, I.), in triangulo *) OBG duo anguli recti forent, quod est absurdum (17, I.). Pariter ostendetur, rectam BGM occurrere circulo EGF in alio

*) Puncta enim B et G non coincidere, patet, quia hoc Casu recta OB in directum esset rectae GL pariter ac rectae BK (Lemm. III.) adeoque rectae BK, GL coinciderent, ac circuli ADC, EGF se in puncto B intus contingerent (Lemm. VI.) contra hypothesin.

alio quodam praeter G puncto v. c. in F, ductisque KC, LF, erit ang KCB = KBC (5, I.) = OBG (15, I.) = OGB (5, I.) adeoque rectae KC, OGL sunt inter se parallelae (27, I.). Eodem modo ostendetur, parallelas esse rectas KB, LF, adeoque erit MC : MG = MB : MF = MK : ML = BK : LG (2, VI.), et KL : ML = BK — LG : LG (17, V.). At magnitudine datae sunt rectae BK, LG (VI. Def. Dat.) adeoque BK — LG (4. Dat.), et ratio BK — LG : LG data est (1. Dat.), ideoque etiam ratio KL : ML data (2, Def. D.). At KL magnitudine data est, magnitudine itaque data est recta LM (2. Dat.): at etiam positione, datumque punctum L, datum itaque punctum M (30. D.). Ducatur recta MI, quae itaque positione ac magnitudine datur (29. Dat.) ac producatur: per alterutrum punctorum B, G, v. c. per punctum B ducatur recta IB, quae occurrat circulo dato, in quo est punctum B, i. e. circulo ADC, in alio quodam puncto P (occurret autem necessario, quod chorda IB non potest esse perpendicularis ad rectam OBK (5, I et 17, I.), quod ita foret, si circulum ACD in B contingeret (18, III,)), ac ducatur recta PC, dico, eam productam occurrere rectae MI, si opus sit productae. Ducta enim recta IG parallela erit rectae PC (Lemm. VII,), et quum in triangulo IGM (rectas enim IG, IM non inter se, adeoque cum recta MG coincidere, patet, quia hac ratione punctum I cum alterutro punctorum B, G coincideret, adeoque in alterutro circulorum datorum foret, contra hypothesin) anguli IGM, IMG simul minores sint duobus rectis (17, I.), sit vero IGM = MCQ (29, I.) rectae PC, MI sibi invicem occurrent in puncto aliquo Q (11, Ax. I.), eritque MI : MQ = MG : MC (2, VI.) = ML : MK = LG : BK. Et ductis rectis LI, KQ, erit etiam LI : KQ = MI : MQ (Schol. 6, VI.) = LG : BK. Et, quum ex hypothesi sit LI > LG, erit etiam KQ > BK (14, V.) adeoque punctum

ctum Q situm erit extra circulum ADB in recta PC productа. Et, quum sit MI: MQ = LG: BK, ac data sit ratio LG: BK (1. Dat.) data erit ratio MI: MQ (2. Def. Dat.) At MI magnitudine data est; magnitudine itaque datur MQ (2. Dat.). Et quum MQ data sit etiam positione, datumque punctum M, datum erit punctum Q (30. D.). Problema itaque eo redit: tribus punctis M, I, Q in eadem recta datis, inflectere per duo eorum Q, I ad circulum ADC positione et magnitudine datum rectas QP, IP quae circulo iterum occurrant in punctis C, B ita, ut juncta CB transeat per tertium punctum M, id est ad Lemm. XXII. Hoc enim facto, recta MB positione dabitur, et abscindet in circulis positione datis ADC, EGF puncta B, G, quae itaque data erunt (28. Dat.), et describetur circulus IBG per data tria puncta I, B, G ex Schol. 5, IV. Hac quidem Analysi Apollonium usum fuisse, indicio est Lemma XXII. At quum hoc ipsum Lemma revocetur ad Lemma X, praestat, Vietae modo rem omnem statim reducere ad Lemma X. Habemus itaque hanc Problematis

Analysin. Fig. 49.

Ostendetur, ut ante, datum esse punctum M, atque esse MC: MG = MB: MF = MK: ML = BK: LG. Ducatur recta MI, quae vel circulo centro O radio OI descripto occurret iterum in puncto aliquo N, vel tanget hunc circulum in I. Ac

1) occurrat iterum in puncto aliquo N, eritque $MI \times MN = MB \times MG$ (1. Schol. 36, III.), pariterque $MB \times MC = MD \times MA$. Est autem $MB \times MG : MB \times MC = MG : MC$ (1, VI.) $= LG : BK$; itaque etiam $MI \times MN : MD \times MA = LG : BK$. Est vero $MH \times MA : MD \times MA = MH : MD$ (1, VI.) $= ML - LG : MK - BK$. At, quum $ML : MK = LG : BK$, etiam $ML - LG : MK - BK = ML : MK$ (19, V.) $= LG : BK$. Itaque etiam $MH \times MA : MD \times MA$

$= LG$

$=$ LG : BK $=$ MI $\times$ MN : MD $\times$ MA. Quare MH $\times$ MA $=$ MI $\times$ MN (14, V.). Datum autem est rectangulum MH $\times$ MA; datum itaque rectangulum MI $\times$ MN. At recta MI magnitudine datur (29. D.): magnitudine itaque datur recta MN (61. D.). Et quum eadem positione data sit, datumque sit punctum M, datur etiam punctum N (30. D.) Problema itaque eo redit: per duo data puncta I, N describere circulum, qui circulum ACD magnitudine ac positione datum extra contingat, id est, Problema reducitur, ad eum Casum Problematis Vietani VIIIvi, quem ante tractavimus. Si vero

Fig. 50.

2) recta MI tangat circulum centro O radio OI descriptum in I, ducta OI perpendicularis erit ad MI (18, III.), et quum recta MI positione data sit (29. D.), datumque sit punctum I, positione datur recta OI (32. D.). Ducatur recta IB, quae, cum non esse possit perpendicularis ad rectam OBK (5, I et 17, I.), circulo ADC iterum occurret in puncto aliquo P, ductaque KP, erit ang KPB $=$ KBP (5, I) $=$ IBO (15, I.) $=$ BIO (5, I.), adeoque rectae KP, OI parallelae erunt (27, I.), et quum datum sit punctum K, positione dabitur recta PK (31. D.). At positione datur etiam circulus ADC, datur itaque punctum P (28. D.), et recta PI positione datur (29. D.), adeoque datum est punctum B (28. D.) et recta KBO positione datur (29. D.). Datur itaque punctum O (28. D.), et radius OI magnitudine datur (29. D.). Circulus igitur centro O radio OI descriptus positione ac magnitudine datus est (7. Def. D.)

Determinatio. Figg. 49. 50.

Quum circulus describendus totus situs esse debeat extra circulos datos, et transire tamen per punctum I, quod ex hypoth. non erit in circumferentia alterutrius circu-

circulorum datorum, punctum I necessario erit extra circulos datos. Deinde, quum circulus describendus totus situs esse debeat extra circulum datum ADC, et contingere tamen circulum EGF, necessario circulus EGF, qui ex hypoth. non continget intra circulum ADC, positus erit vel totus, vel certe aliqua sui parte extra circulum ADC, id est, erit semper KL + LG > BK, vel KL > BK — LG. Eodem modo ostendetur, circulum ADC positum esse necessario vel totum, vel certe aliqua sui parte extra circulum EGF, quod caeterum vel eam ob rationem necessario fiet, quod circulum ADC majorem esse sumimus circulo EGF. Praeterea punctum I non coincidere potest cum puncto M. Si enim punctum I coincideret cum puncto M, foret OM = OG, adeoque ang. OMG = OGM (5, I.). At, quum ang OGB = OBG sit acutus (3, Schol. 17, I.) angulus OGM foret obtusus (1. Schol. 13, I.), adeoque etiam angulus OMG, quod est absurdum (17, I.). Puncta enim M et G diversa esse patet, quod MK : ML = BK : LG, vel KL : ML = BK — LG : LG (17, V.), et ostendimus esse necessario KL > BK — LG, unde etiam erit LM > LG (14, V.). Deinde (Fig. 49.) si 1) puncta N, I non coincidant, recta NI producta si opus sit, aut secabit circulum EGF adeoque etiam circulum ADC (Lemm. XXIII.), aut non. Et, si non secet, patet ex Determinatione ejus Casus Problematis Vietani VIIIvi, quem ante tractavimus, unum semper circulum describi posse, qui conditionibus Problematis satisfaciat. Si vero recta NI producta secet circulum EGF, adeoque etiam circulum ADC, ut circulus IBG describi possit, ex Determinatione ejusdem Casus Probl. Viet. VIIIvi opus est, ut puncta N, I sint ex eadem circuli ADC parte, pariterque ex eadem circuli EGF parte. Ducantur ex M rectae MRr, MSs, contingentes circulum EGF in punctis r, s, (17, III.), adeoque etiam circulum

culum ADC in punctis R, S (Lemm. XXIII.), et producantur ex altera parte puncti M ad MU, MT, dico punctum I, ut Problema solvi possit, necessario positum esse vel 1) in ipsis rectis MR, MS, et quidem in ea earum parte, quae inter R et r aut S et s interjacet, vel in ea etiam parte, quae est in productis MU, MT, ac his duobus Casibus unam semper Solutionem locum habere, non vero esse posse punctum I, neque inter M et r, M et s, neque in ea parte, quae est in rectis MR, MS ultra R et S productis, vel 2) si inter rectas MR, MS interjaceat, positum esse debere, vel in eo spatio, quod partibus rectarum Rr, Ss et circulis ADC, EGF comprehenditur, vel in eo, quod est inter rectas productas MU, MT, non vero in eo quod rectis Mr, Ms et circulo EGF comprehenditur, neque in eo, quod rectis MR, MS ultra R et S productis, et circulo ADC comprehenditur. Quodsi enim sit punctum I inter rectas MR, MS in eo spatio, quod partibus rectarum Rr, Ss et circulis ADC, EGF comprehenditur, recta MI secabit circulum EGF in duobus punctis, v, x, pariterque producta circulum ADC in duobus punctis V, X, et quum, ut in Analysi vidimus, esse debeat MI × MN = MH × MA, sit vero MD × MA = MV × MX (1. Schol. 36, III.) erit MI × MN : MV × MX = MH × MA : MD × MA = MH : MD (1, VI.) = ML — LG : MK — BK. Est vero ML : MK = LG : BK, adeoque etiam ML — LG : MK — BK = ML : LK (19, V) = LG : BK, et MI × MN : MV × MX = LG : BK. Quum vero in triangulis XKM, xLM sit angulus ad M communis, et KM : LM = BK : LG = KX : Lx, et ex triangulis XKV, xLv angulus KXM minor recto, pariter ac angulus LxM (5, I. et 17, I.) erit Mx : MX = LG : BK (1. Schol. 7, VI.) vel MV × Mx : MV × MX = LG : BK (1, VI.), adeoque MI × MN : MV × MX = MV × Mx : MV × MX, et MI × MN = MV × Mx (14, V.), vel MI : Mx

= MV

$=$ MV : MN (16, VI.). Quum vero ſit ex hypotheſi MI $<$ MV, erit Mx $<$ MN, (14, V.) adeoque puncta I, N ex eadem parte circuli EGF poſita ſunt. Pariter, quum ſit MI : MV $=$ Mx : MN (16, V.), et ex hypotheſi MI $>$ Mx, erit etiam MV $>$ MN (14, V.) adeoque puncta I, N ex eadem parte circuli ADC ſita ſunt. Si deinde punctum I poſitum ſit inter rectas productas MU, MT, patet, punctum N, quod ex ea parte puncti M ſumitur, ex qua eſt I, eſſe ex eadem utriusque circuli dati parte, ex qua eſt I. Hoc utroque Caſu igitur ex Determinat. ejus Caſus Probl. VIIIvi, quem tractavimus, duo ſemper circuli deſcribi poterunt, qui Problemati ſatisfacient. Si vero punctum I poſitum ſit in ſpatio comprehenſo inter rectas Mr, Ms et circulum EGF, oſtendetur, ut ante, eſſe MI × MN $=$ MV × Mx $=$ MX × Mv, unde erit MI : MX $=$ Mv : MN (16, VI.), et quum ex hypotheſi ſit MI $<$ Mv, erit MX $<$ MN (14, V.) Puncta igitur I, N è diverſis circuli ADC pariter ac EGF partibus erunt. Similiter, ſi punctum I poſitum ſit in ſpatio comprehenſo rectis MR, MS ultra R, S productis, et circulo ADC; erit ob MI : Mv $=$ MX : MN, et MI $>$ MX, etiam Mv $>$ MN (14, V.), adeoque iterum puncta I, N è diverſis circuli ADC pariter ac EGF partibus erunt. Hoc utroque caſu igitur Problema noſtrum, ut ex Determinatione Caſus Probl. VIIIvi ante tractati patet, ſolvi nequit. Simili plane ratione, ſi punctum I ſit in ipſis rectis MR, MS, ea quae diximus, demonſtrantur. Denique, (Fig. 50.) ſi 2) puncta I, N coincidant, adeoque recta MI tangat circulum IBG, i. e. ſi ſit quadratum ex MI $=$ MA × MH, unus circulus IBG locum habebit, ſi punctum I ſit extra angulum SMR, vel UMT. Nempe, quum circuli ADC, IBG extra ſe contingere debeant, punctum B inter puncta K et O, adeoque inter puncta P et I interjacere debet. Ducta autem diametro

PKp

PKp ad MI perpendiculari, ductisque per P, p tangentibus PY, py, erunt hae parallelae rectae MI (18, III et 28, I.) et recta MI, quae inter PY, py transire nequit, quod ex hypothesi ita posita est, ut etiam producta non transeat per circulum ADC, necessario posita erit extra utramque parallelam PY, py; id est, altera parallelarum PY, py, puta PY erit etiam ipsa extrema trium parallelarum PY, py, MI, altera vero py intermedia erit inter PY, MI; vel una parallelarum PY, py, nempe PY circulum ADC et rectam BI, adeoque circulum ADC et punctum I ex eadem sui parte, altera vero py circulum ADC et punctum I è diversis sui partibus habebit, adeoque ad unum saltim punctorum P, p nempe ad P duci potest recta PBI ita ut punctum B intermedium sit inter P et I (Lemm. L.) Si vero punctum I intra angulum RMS, vel eum qui ipsi à vertice oppositus est, positum sit; erit, pariter ducta PKp ad MI perpendiculari, ductisque tangentibus PY, py rectae MI ut ante parallelis, recta MI intermedia inter rectas PY, py, adeoque utraque tangentium PY, py circulum ADC et punctum I ex eadem sui parte habebit, ductisque rectis IBP, Ibp, erit tam B inter I et P, adeoque inter O et K, quam b inter I et p adeoque inter o et K intermedium (Lemm. L.), adeoque hoc casu duo circuli IBG, Ibg describi poterunt, qui Problemati satisfacient (Lemm. D.). Denique, si recta MI coincidat cum una tangentium MR, MS, haec ipsa erit loco unius tangentium PY, py, et punctorum P, p unum coincidet cum uno punctorum R, S, restabit itaque una saltim tangentium PY, py, v. c. PY, quae ipsi MI parallela erit, et circulum ADC ac punctum I ex eadem sui parte habebit. Hoc itaque casu unum saltim punctum B inter P et I intermedium inveniri, adeoque unus saltim circulus IBG describi potest. Caeterum patet semper eo Casu, quo $MI^2 =$

 MA

$MA \times MH$, punctum I, si sit intra angulum RMS, esse in spatio rectis Rr, Ss et circulis ADC, EGF comprehenso, vel si sit in una rectarum MR, MS, esse in ejus parte Rr, vel Ss. Nam quum $MA \times MD = MS^2$ (36, III.), erit $MI^2 : MS^2 = MA \times MH : MA \times MD = MH : MD = LG : BK$. At $LG < BK$, ex hypoth. adeoque etiam $MI^2 < MS^2$ et $MI < MS$. Eodem modo, quum sit $MH \times ME = Ms^2$, erit $MI^2 : Ms^2 = MH \times MA : MH \times ME = MA : ME = BK : LG$, et quum sit ex hypoth. $BK > LG$, erit etiam $MI^2 > Ms^2$, et $MI > Ms$. His praemissis haec erit

Compositio. Figg. 49. 50.

Ducatur recta AKDELH, inque ea ultra L producta sumatur punctum M ita, ut sit $BK - LG : LG = KL : LM$ (12, VI.), Jungatur recta MI, fiatque $MI : MA = MH : MN$ (12, VI.), eritque recta MN vel aequalis vel non aequalis rectae MI. Ac si 1) (Fig. 49.) recta MI non sit aequalis rectae MN, ponatur MN in recta MI, si opus sit producta, ac describatur per Casum Problem. Viet. VIIIvi ante tractatum circulus IBN, vel si punctum I positum sit inter rectas MR, MS ipsas, aut ultra M productas, describantur circuli IBN, IbN, ita, ut circulus IBN, et si locum habeat, pariter circulus IbN per puncta I, N transeat, ac circulum datum ADC in B, vel si locum habeat, b, extra contingat: dico eundem IBN vel IbN contingere etiam circulum EGF. Si vero 2) (Fig. 50.) recta MI aequalis sit rectae MN, ducatur recta IO perpendicularis ad MI (11, I.) et per centrum K diameter PKp parallela ipsi IO, ac, si punctum I positum sit intra angulum RMS, aut UMT, per utrumque punctum P, p ducantur rectae PI, pI, quae circulo ADC iterum occurrent in punctis B, b; si vero punctum I non positum sit intra angulum RMS, aut UMT,

ad

ad illud tantum punctum P, a quo ducta PY circulum contingens habet circulum ac punctum I ex eadem sui parte, ducatur recta PI, quae circulo ADC iterum occurret in puncto aliquo B. Iungatur porro recta KB, et si locum habeat etiam Kb, dico, eam productam convenire cum recta IQ in puncto aliquo O, vel o, ac circulum radio OI vel oI, ac centro O vel o descriptum extra contingere utrumque circulum datum.

Demonstratio.

Si 1) (Fig. 49.) MI non sit aequalis rectae MN, puncta I, N, siquidem Data ita comparata sint, ut in Determinatione diximus, ita semper, ut ibidem ostendimus, posita erunt, ut describi possit circulus IBN, vel IbN, qui per puncta I, N transeat, ac circulum ADC in B vel b extra contingat. Quo facto ducatur recta MB, vel si b locum habeat, etiam Mb, dico rectam MB, vel Mb circulo ADC iterum occurrere in puncto aliquo C vel c. Si enim non occurreret, tangeret circulum ADC in B vel b, ac foret perpendicularis ad rectam (Lemm. III.) KBO (18, III.), adeoque tangeret etiam circulum IBN vel IbN in B, vel b (Cor. 16, III.), ac foret $MB^2 = Mb^2 = MD \times MA$ (36, III.), atque etiam $MB^2 = Mb^2 = MI \times MN$ (36, III.) $= MH \times MA$ ex constructione, adeoque $MD \times MA = MH \times MA$, vel $MD = MH$ quod est absurdum, quum ex hypothesi circuli dati intus se contingere non possint. Recta igitur MB vel Mb occurret circulo ADC in duobus punctis B, C vel b, c, adeoque circulo quoque EGF in duobus punctis F, G vel f, g occurret (Lemm. XXIII.). Hinc simul patet, rectam MB, vel Mb, circulo quoque IBN, vel IbN in alio quodam praeter B vel b puncto occurrere. Ducantur jam rectae KC, LG, LF (brevitatis caussa de eo Casu tantum loquemur, quo unum saltim punctum B locum

 habet

habet, quum alter, quo punctum quoque b locum habet ei similis plane sit), et, quum sit in triangulo KCB angulus KCM, pariterque in triangulo LGF angulus LGM minor recto (3. Schol. 17, I.), ac ex constructione BK — LG : LG = KL : LM, vel $\left.\begin{matrix}BK\\CK\end{matrix}\right\}$: LG = KM : LM (18, V.), sitque praeterea angulus KMC communis; erit angulus MKC = MLG, et ang. KCM = LGM (7, VI.) adeoque rectae KC, LG parallelae (28, I.), et MC : MG = BK : LG (4, VI.), adeoque etiam MB × MC : MB × MG = BK : LG (1, VI.) Quum vero sit, ut vidimus, KM : LM = BK : LG, erit etiam MD : MH = BK : LG (19, V.), adeoque MB × MC : MB × MG = MD : MH = MA × MD : MA × MH. Est vero MB × MC = MA × MD (1. Schol. 36, III), quare et MB × MG = MA × MH (14, V.) = MI × MN ex constructione. Erit igitur punctum G in circulo IBN: si enim non esset in circulo IBN, hic circulus, qui lineam MB, ut vidimus in alio adhuc puncto secat, secaret eam v. g. in Z, ac foret MB × MZ = MI × MN (1. Schol. 36, III.) = MB × MG, adeoque MZ = MG, quod est absurdum. Ducatur recta OG, eritque angulus OGB = OBG (5, I.) = KBC (15, I.) = KCB (5, I.). At etiam LGM = KCB, ut vidimus, adeoque LGM = BGO. Quum vero puncta K, L sint ex eadem rectae MB parte, puncta vero O, K è diversis puncti B, adeoque rectae MB parte, puncta O, L è diversis rectae CB partibus erunt, ac rectae OG, LG erunt in directum (3. Schol. 15, I.), adeoque circulus IBN extra continget circulum EGF in puncto G (Lemm. IV.). Si vero 2) (Fig. 50.) MI aequalis sit rectae MN, recta PI necessario circulo ADC iterum occurret in puncto aliquo B (pariterque, quod brevitatis studio omittimus, recta p I occurret circulo ADC iterum in puncto aliquo b.) Nam si non occurrat, continget circulum ADC in P, adeo-

que

quae erit KP perpendicularis ad PI (18, III.) At KP ex constr. etiam perpendicularis est ad MI, unde PI parallela erit rectae MI (28, I.) quod est absurdum. Recta igitur PI secat circulum ADC in puncto aliquo B, ac recta KB versus Z producta conveniet cum recta IO. Est enim IBZ = KBP = KPB, adeoque minor recto (3. Schol. 17, I.), pariterque OIB = KPB (27, I.) adeoque minor recto. Rectae itaque KBZ, IO convenient inter se in puncto aliquo O (11. Ax. I.), et quum sit OIB = ZBI = OBI, ut vidimus, erit OB = OI (6, I.), adeoque circulus radio OI, centro O descriptus per B transit, ac tangit circulum ADC extra in B, (Lemm. IV.) quod nempe ex Determinatione PI > PB, adeoque et KO > KB. Demonstrabitur porro eodem prorsus modo, ac supra eo Casu, quo MI non erat aequalis rectae MN, posito saltim hic semper MI^2 loco MI × MN, circulum radio OI centro O descriptum etiam circulum EGF in puncto aliquo G extra contingere.

Computatio. Figg. 49. 50.

Habemus semper $LM = \frac{KL.LG}{BK - LG}$; $MK = KL + LM$ $= \frac{KL.BK}{BK - LG}$; $MA = KM + BK = \frac{(KL + BK - LG)\,BK}{BK - LG}$; $MH = LM - LG = \frac{(KL + LG - BK)\,LG}{BK - LG}$;

adeoque, si 1) (Fig. 49.) non sit $MI^2 = MA \times MH$; erit $MI \times MN = MA \times MH$

$$= \frac{BK.\,LG\,(KL + BK - LG)\,(KL - (BK - LG))}{(BK - LG)^2};$$

Est autem $MI^2 = MK^2 + KI^2 - 2MK \times KI$ cosin MKI, vel, si ponamus angulum MKI = κ, erit

$$MI = \sqrt{\left(\frac{KL^2 . BK^2}{(BK-LG)^2} + KI^2 - \frac{2 KI . KL . BK}{BK-LG} . \text{cosin } \kappa\right)}$$

$$= \sqrt{\left[KL^2 BK^2 + KI^2 (BK-LG)^2 - 2 KI . KL . BK (BK-LG) \text{ cosin } \kappa\right]} : \left[BK-LG\right]$$

adeoque erit

$$MN = \left[BK . LG (KL + BK - LG) (KL - (BK - LG))\right] : (BK-LG) \sqrt{\left[KL^2 BK^2 + KI^2 (BK-LG)^2 - 2 KI . KL . BK (BK-LG) \text{ cosin } \kappa\right]}$$

$$\text{Et } NI = MI \sim MN = \left[KL^2 BK^2 + KI^2 (BK-LG)^2 - 2 KI . KL . BK (BK-LG) \text{ cos } \kappa \sim BK . LG (KL^2 - (BK-LG)^2)\right] : (BK-LG) \sqrt{\left[KL^2 BK^2 + KI^2 (BK-LG)^2 - 2 KI . KL . BK (BK-LG) \text{ cosin } \kappa\right]}$$

$$= \left[\pm KL^2 BK (BK-LG) \pm (KI^2 + BK . LG) (BK-LG)^2 \mp 2 KI . KL . BK (BK-LG) \text{ cosin } \kappa\right] : (BK-LG) \sqrt{\left[KL^2 BK^2 + KI^2 (BK-LG)^2 - 2 KI . KL . BK (BK-LG) \text{ cosin } \kappa\right]}$$

ubi signa superiora sumenda sunt, si sit $MI > MN$; inferiora, si sit $MI < MN$;

$$\text{vel } NI = \left[\pm KL^2 BK \pm (KI^2 + BK . LG) (BK-LG) \mp 2 KI . KL . BK . \text{cosin } \kappa\right] : \sqrt{\left[KL^2 BK^2 + KI^2 (BK-LG)^2 - 2 KI . KL . BK (BK-LG) \text{ cosin } \kappa\right]}$$

=

$$= \left[\pm BK\,(KL^2 + KI^2 - 2\,KI.\,KL\ \text{cosin}\ \kappa)\right.$$
$$\left.\mp LG\,(KI^2 + BK.\,LG - BK^2)\right]$$
$$:\sqrt{\left[KL.^2\,BK^2 + KI^2\,(BK - LG)^2\right.}$$
$$\overline{\left.- 2.KI.\,KL.\,BK\,(BK - LG)\ \text{cosin}\ \kappa\right]}$$

Porro $\text{sin}\ KIN = \frac{\text{sin}\ \kappa.\ MK}{MI} = KL.\ BK.\ \text{sin}\ \kappa.$

$$:\sqrt{\left[KL.^2\,BK^2 + KI^2\,(BK - LG)^2\right.}$$
$$\overline{\left.- 2\,KI.\,KL.\,BK\,(BK - LG)\ \text{cosin}\ \kappa\right]}$$

et $\text{cosin}\ KIN = \pm \frac{KI - MK.\ \text{cosin}\ \kappa}{MI} = \pm\left[KI\,(BK - LG)\right.$

$$\left.- KL.\,BK\ \text{cosin}\ \kappa\right] : \sqrt{\left[KL.^2\,BK^2 + KI^2\,(BK - LG)^2\right.}$$
$$\overline{\left.- 2\,KI.\,KL.\,BK\,(BK - LG)\ \text{cosin}\ \kappa\right]}$$

Est autem ex Computatione ejus Casus Problematis Vietani VIIIvi, quem supra tractavimus, si ponatur angulus $KIN = i$;

$$: OI = \left[BK\,(BK^2 + KI.\,IN.\ \text{cosin}\ i - KI^2)\right.$$
$$\left.+ KI\ \text{sin}\ i\ \sqrt{(KI^2 - BK^2)(IN^2 + KI^2 - 2\,KI.\,IN.\ \text{cos}\ i - BK^2)}\right]$$
$$: \left[KL^2\ \overline{\text{sin}\ i}^{\,2} - BK^2\right]$$

At si iis, quos vixdum dedimus, valores substituantur, erit, omnibus rite evolutis;

$$BK^2 - KI^2 + KI.\ IN.\ \text{cosin}\ i$$
$$= BK\left[(BK^2 - KL.\,KI.\,BK\ \text{cos}\ \kappa)(KL^2 + KI^2 - 2\,KI.\,KL\ \text{cos}\ \kappa)\right.$$
$$+ BK.\,LG\,(BK + LG)(KL.\,KI.\ \text{cos}\ \kappa - KI^2)$$
$$\left.+ LG.\,KI^2\,(LG^2 + KI.\,KL.\ \text{cosin}\ \kappa - KL^2)\right]$$
$$: \left[KL.^2\,BK^2 + KI^2\,(BK - LG)^2\right.$$
$$\left.- 2\,KI.\,KL.\,BK\,(BK - LG)\ \text{cosin}\ \kappa\right]$$

 Eodem

Eodem modo erit $IN^2 + KI^2 - BK^2 - 2\,KI.\,IN.\cos i$

$$= \Big[BK^2\left(KL^2 - (BK - LG)^2\right)$$

$$\times\left(KL^2 + KI^2 - 2\,KI.\,KL.\,\text{cosin}\,\kappa - LG^2\right)\Big]$$

$$:\Big[KL.^2\,BK^2 + KI^2\,(BK - LG)^2$$

$$- 2\,KI.\,KL.\,BK\,(BK - LG)\,\text{cosin}\,\kappa\Big]$$

adeoque

$$KI.\sin i\,\sqrt{(KI^2 - BK^2)(IN^2 + KI^2 - BK^2 - 2\,KI.\,IN.\cos i)}$$

$$= KI.\,KL.\,BK.^2\sin\kappa\,\sqrt{\Big[(KI^2 - BK^2)\left(KL^2 - (BK - LG)^2\right)}$$

$$\times\left(KL^2 + KI^2 - 2\,KI.\,KL.\cos\kappa - LG^2\right)\Big]$$

$$:\Big[KL.^2\,BK^2 + KI^2\,(BK - LG)^2$$

$$- 2\,KI.\,KL.\,BK\,(BK - LG)\,\text{cosin}\,\kappa\Big]$$

Et, quum sit $KI.^2\,\overline{\sin i}^{\,2} - BK^2$

$$= \Big[KI.^2\,KL.^2\,BK.^2\,\overline{\sin\kappa}^{\,2} - BK^2(KL.^2\,BK^2 + KI^2\,(BK - LG)^2$$

$$+ 2\,KI.\,KL.\,BK^3\,(BK - LG)\,\text{cosin}\,\kappa\Big] : \Big[KL.^2\,BK^2$$

$$+ KI^2\,(BK - LG)^2 - 2\,KI.\,KL.\,BK\,(BK - LG)\cos\kappa\Big]$$

erit tandem $2\,OI =$

$$\Big[(BK^3 - KL.\,KI.\,BK\cos\kappa)(KL^2 + KI^2 - 2\,KI.\,KL.\cos\kappa)$$

$$+ BK.\,LG\,(BK + LG)(KI.\,KL.\cos\kappa - KI^2)$$

$$+ LG.\,KI^2\,(LG^2 + KI.\,KL.\,\text{cosin}\,\kappa - KL^2)$$

$$+ KI.\,KL.\sin\kappa\,\sqrt{(KI^2 - BK^2)\left(KL^2 - (BK - LG)^2\right)}$$

$$\times\left(KL^2 + KI^2 - 2\,KI.\,KL.\cos\kappa - LG^2\right)\Big]$$

$$:\Big[KI.^2\,KL.^2\,\overline{\sin\kappa}^{\,2} - KL.^2\,BK^2 - KI^2\,(BK - LG)^2$$

$$+ 2\,KI.\,KL.\,BK\,(BK - LG)\,\text{cosin}\,\kappa\Big]$$

vel

Vel, si loco anguli κ data sit recta LI, erit $LI^2 = KL^2 + KI^2 - 2\,KI.\,KL.\,\mathrm{cosin}\,\kappa$;

$$\text{et } \overline{\sin\kappa}^2 = 1 - \left(\frac{KL^2 + KI^2 - LI^2}{2\,KL.\,KI}\right)^2$$

$$= \frac{\left((KL+KI)^2 - LI^2\right)\left(LI^2 - (KL-KI)^2\right)}{4\,KL^2.\,KI^2}$$

$$\text{vel } KI.^2 KL.^2 \overline{\sin\kappa}^2 = \tfrac{1}{4}\left((KL+KI)^2 - LI^2\right)\left(LI^2 - (KL-KI)^2\right);$$

adeoque
$$\begin{aligned} OI = \Big[& BK.LI^2\,(2\,BK^2 + LI^2 - KL^2 - KI^2) \\ & + BK.LG\,(BK+LG)(KL^2 - LI^2 - KI^2) \\ & + LG.KI^2\,(2\,LG^2 + KI^2 - KL^2 - LI^2) \\ & \pm \surd\,(KI^2 - BK^2)\left(KL^2 - (BK-LG)^2\right)(LI^2 - LG^2) \\ & \quad \times \left((KL+KI)^2 - LI^2\right)\left(LI^2 - (KL-KI)^2\right)\Big] \\ : \Big[& \left((KL+KI)^2 - LI^2\right)\left(LI^2 - (KL-KI)^2\right) \\ & - 4\left(KL^2 BK^2 + KI^2 (BK-LG)^2 - BK(BK-LG)(KL^2 + KI^2 - LI^2)\right)\Big] \end{aligned}$$

Est autem
$$\begin{aligned} & BK.\,LI^2\,(2\,BK^2 + LI^2 - KL^2 - KI^2) \\ & + BK.\,LG\,(BK+LG)(KL^2 - LI^2 - KI^2) \\ & + LG.KI^2\,(2\,LG^2 + KI^2 - KL^2 - LI^2) \\ = & (KI^2 - BK^2)\left(LG\,(KI^2 + LI^2 - KL^2) - 2\,BK.LI^2\right), \\ & + (LI^2 - LG^2)\left(BK\,(KI^2 + LI^2 - KL^2) - 2\,LG.KI^2\right) \end{aligned}$$

$$\text{et } KL^2 BK^2 + KI^2 (BK-LG)^2 - BK\,(BK-LG)(KL^2 + KI^2 - LI^2)$$
$$= BK^2\,LI^2 + LG^2\,KI^2 + BK.LG\,(KL^2 - KI^2 - LI^2)$$

Itaque fit OI

$$= \left[(KI^2 - BK^2)\left(LG(KI^2 + LI^2 - KL^2) - 2BK.LI^2\right) + (LI^2 - LG^2)\left(BK(KI^2 + LI^2 - KL^2) - 2LG.KI^2\right) + \sqrt{(KI^2 - BK^2)(KL^2 - (BK - LG)^2)(LI^2 - LG^2) \times ((KL + KI)^2 - LI^2)(LI^2 - (KL - KI)^2)}\right]$$

$$: \left[((KL + KI)^2 - LI^2)(LI^2 - (KL - KI)^2) - 4\left(BK^2 LI^2 + LG^2 KI^2 + BK.LG(KL^2 - KI^2 - LI^2)\right)\right]$$

Si loco rectae KL datus fit angulus KIL $= \iota$, erit ob $KL^2 = KI^2 + LI^2 - 2KI.IL.\text{cosin}\,\iota$,

et $((KL + KI)^2 - LI^2)(LI^2 - (KL - LI)^2) = 4KI^2LI^2\,\overline{\text{fin}\,\iota}^2$;

$$2OI = \left[(KI^2 - BK^2)(LG.KI.IL.\text{cosin}\,\iota - BK.IL^2) + (LI^2 - LG^2)(BK.KI.IL.\text{cosin}\,\iota - LG.KI^2) + KI.IL.\text{fin}\,\iota\sqrt{(KI^2 - BK^2)(LI^2 - LG^2) \times (KI^2 + IL^2 - 2KI.IL.\text{cosin}\,\iota - (BK - LG)^2)}\right]$$

$$: \left[KI^2\,IL^2\,\overline{\text{fin}\,\iota}^2 - BK^2\,IL^2 - LG^2\,KI^2 + BK.LG.KI.IL.\text{cosin}\,\iota\right]$$

Atque haec jam fufficiant pro Cafu primo. Si vero 2) (Fig. 50.) fit $MI^2 = MA \times MH$, poteft in triangulo MKI, cujus tum tria latera data funt, inveniri angulus KIM, adeoque hujus fupplementum KIW, ac anguli KIW complementum, nempe angulus pKI, vel denique hujus fupplementum, angulus nempe PKI, unde in triangulo PKI, cujus latus $PK = BK$, invenietur recta PI, ac angulus KPI, adeoque in triangulo ifofceli KPB recta PB, adeoque $BI = PI - PB$, unde habebitur $OI = \frac{BK.BI}{BP}$. Vel adhiberi poteft etiam hic formula aliqua Cafus praecedentis

tis v. g. ea, in qua rectae BK, LG, KI, LI, KL datae ponuntur, atque eliminari adhuc potest utravis rectarum KI, LI, quo tamen calculus non fit expeditior. Patet praeterea, in utroque Casu similem esse Calculum pro altero circulo, si quis ex Determinatione describi potest. Observatis deinde regulis similibus iis, quas ad Casum Problem. Vietani VIIIvi à nobis tractatum, attulimus, idem Calculus pro iis quoque Casibus adhiberi poterit, quibus alteruter circulorum datorum, vel uterque à circulo describendo intus contingi, vel eum intus contingere debent, quae omnia brevitatis studio omitto.

Neque jam in Problemate Vietano Xmo longus ero. Quum enim totum redeat ad praecedens Problema IX, ut Vieta ostendit, ea omnia, quae de Solutione IXni monui, valent etiam de Solutione Xmi. Calculus etiam, quem pro Casu praecipuo Problematis IXni exhibui, facillime ad similem Casum Problematis Xmi adhiberi potest. Nempe est (Fig. 51.) EH = EA + AH, id est, ex Calculo praecedente, scriptis

pro	KI	LI	KL	BK	LG	BK — LG
litteris	AB	DA	BD	AH — BL vel δ	AH — DM vel Δ	—(BL — DM) vel $\delta - \Delta$

$$EH = AH + \Big[(AB^2 - \delta^2)\big(\Delta(AB^2 + AD^2 - BD^2) - 2\delta.AD^2\big)$$

$$+ (AD^2 - \Delta^2)\big(\delta(AB^2 + AD^2 - BD^2) - 2\Delta.AB^2\big)$$

$$+ \sqrt{(AB^2 - \delta^2)\big(BD^2 - (\delta - \Delta)^2\big)(AD^2 - \Delta^2)}$$

$$\times \big((BD + AB)^2 - AD^2\big)\big(AD^2 - (BD - AB)^2\big)\Big]$$

$$: \Big[\big((BD + AB)^2 - AD^2\big)\big(AD^2 - (BD - AB)^2\big)$$

$$- 4\big(\delta^2 DA^2 + \Delta^2.AB^2 + \delta\Delta(BD^2 - AB^2 - AD^2)\big)\Big]$$

vel

vel, si loco rectae BD datus sit angulus BAD $= \alpha$, erit

$$2EH = 2AH + \Big[(AB^2 - \delta^2)(\Delta . AB . AD . \text{cosin}\, \alpha - \delta . AD^2)$$
$$+ (AD^2 - \Delta^2)(\delta . AB . AD . \text{cosin}\, \alpha - \Delta . AB^2)$$
$$+ AB . AD . \text{sin}\, \alpha \sqrt{(AB^2 - \delta^2)(AD^2 - \Delta^2)}$$
$$\times \left(AB^2 + AD^2 - 2\, AB . AD . \text{cosin}\, \alpha - (\delta - \Delta)^2\right)\Big]$$
$$: \Big[AB^2\, AD^2\, \overline{\text{sin}\, \alpha}^2 - \delta^2\, AD^2 - \Delta^2\, AB^2$$
$$+ \delta . \Delta . AB . AD . \text{cosin}\, \alpha\Big]$$

Ultimam hanc formulam benevole mecum communicavit Doctissimus *Pfleiderer* alia methodo deductam, quam, cum sit simplicissima, breviter saltim indicabo. Ex centro circuli quaesiti demittantur perpendicula EI, EK in latera AB, AD trianguli ABD, et per puncta I, E rectis EK, AD parallelae agantur IN, EP. Ita ang. rect. EIN + AIN = NAI + AIN, adeoque EIN = NAI = BAD. Ponatur angulus BAD vel NAI $= \alpha$. Porro AN : AI = cosin α : sin. tot.

Quare $AN = AI . \dfrac{\text{cosin}\, \alpha}{\text{sin tot}}$; $\left.\begin{matrix} EP \\ NK \end{matrix}\right\} : EI = \text{sin} \left\{\begin{matrix} EIN \\ \alpha \end{matrix}\right\} : \text{sin. tot}$

et $NK = EI . \dfrac{\text{sin}\, \alpha}{\text{sin tot}}$; $AK = AN + NK = AI . \dfrac{\text{cosin}\, \alpha}{\text{sin. tot}} + \dfrac{EI . \text{sin}\, \alpha}{\text{sin. tot}}$;

Sed $\left.\begin{matrix} AB^2 - (EB^2 - EA^2) = 2\, AB \times AI \\ AD^2 - (ED^2 - EA^2) = 2\, AD \times AK \end{matrix}\right\}$ (13, II.)

h. e. $AB^2 - \delta(\delta + 2\, EA) = 2\, AB \times AI$.

et $AD^2 - \Delta(\Delta + 2\, EA) = 2\, AD \times AK$.

Quare I) $\dfrac{AB^2 - \delta^2}{2} = \delta . EA + AB \times AI$.

II) $\dfrac{AD^2 - \Delta^2}{2} = \Delta . EA + AD \times AI . \dfrac{\text{cosin}\, \alpha}{\text{sin. tot}}$

$+ AD \times EI . \dfrac{\text{sin}\, \alpha}{\text{sin. tot}}$

III)

III) $\frac{AD^2 - \Delta^2}{2} - \left(\Delta . EA + AD . AI . \frac{\text{cosin}\ \alpha}{\text{sin. tot}}\right)$

$= AD \times EI . \frac{\text{sin}\ \alpha}{\text{sin. tot}}$ ex II.

IV) $\frac{AD}{AB}\left(\frac{AB^2 - \delta^2}{2} - \delta . EA\right) \frac{\text{cosin}\ \alpha}{\text{sin. tot}} = AD . AI . \frac{\text{cosin}\ \alpha}{\text{sin. tot}}$ ex I.

V) $AD . EI . \frac{\text{sin.}\ \alpha}{\text{sin. tot}} = \frac{AD^2 - \Delta^2}{2} - \Delta . EA$

$- \frac{AD}{AB} . \frac{(AB^2 - \delta^2)}{2} . \frac{\text{cosin}\ \alpha}{\text{sin. tot}} + \frac{AD}{AB} . \frac{\text{cosin}\ \alpha}{\text{sin. tot}} . \delta . EA$

$= \frac{AD^2 - \Delta^2 - \frac{AD}{AB}(AB^2 - \delta^2) . \frac{\text{cosin}\ \alpha}{\text{sin. tot}}}{2}$

$- \left(\Delta - \frac{AD}{AB} . \frac{\text{cosin}\ \alpha}{\text{sin. tot}} \delta\right) EA$ ex III. et IV.

VI) $AD . AI . \frac{\text{sin}\ \alpha}{\text{sin. tot}} =$

$\frac{AD}{AB} . \frac{\text{sin}\ \alpha}{\text{sin. tot}} . \frac{(AB^2 - \delta^2)}{2} - \frac{AD}{AB} . \frac{\text{sin}\ \alpha}{\text{sin. tot}} . \delta . EA$ ex I.

adeoque, si sumantur Quadrata Vti et VIti, atque addantur, et aequatio in justum ordinem redigatur, invenietur recta EA, adeoque etiam EH, ita, ut ante diximus. Caeterum monet adhuc Vir Doctissimus, posse rem, ob $a^2 - 2\,a\,b\ \text{cosin}\ \phi + b^2 = (a-b)^2 + 2\,ab - 2\,ab\ \text{cosin}\ \phi$ $= (a-b)^2 + 2\,ab\,(1 - \text{cosin}\ \phi) = (a-b)^2 + 4\,ab\ \overline{\text{sin}\ \tfrac{1}{2}\phi}^2$, ita adhuc exprimi:

$$2\,EH = 2\,AH + \Big[(AB^2 - \delta^2)\left(\Delta . \cos \alpha - \frac{AD}{AB} . \delta\right)$$
$$- (AD^2 - \Delta^2)\left(\frac{AB}{AD} . \Delta - \delta . \cos \alpha\right) + \sin \alpha \sqrt{(AB^2 - \delta^2)}$$
$$\times (AD^2 - \Delta^2)\left((AD - AB)^2 + 4\,AD . AB . \overline{\sin \tfrac{1}{2} \alpha}^2 - (\delta - \Delta)^2\right)\Big]$$
$$: \Big[AB . AD . \overline{\sin \alpha}^2 - \left(\Delta \sqrt{\frac{AB}{AD}} - \delta \sqrt{\frac{AD}{AB}}\right)^2$$
$$+ 4 . \Delta . \delta . \overline{\sin \tfrac{1}{2} \alpha}^2\Big]$$

Atque haec quidem breviter monenda putavi de pleniore ſingulorum Problematum tractatione. Pauca quaedam adjiciam de univerſo librorum Apollonii ordine. Id ſane ex iis, quae hactenus dixi, perſpicuum eſt, Apollonium rem omnem longe uberius tractaſſe, ac Vietam, variosque Problematum Caſus longe accuratius perſecutum eſſe. Magis vero patebit, ſi Apollonii ordinem oſtendero eum, ex quo Lemmata à Pappo conſervata, ad eam potiſſimum Propoſitionem adhiberi debent, ad quam Pappo teſte pertinebant apud Apollonium. Quod ad id Problema attinet, quod Ghetaldus poſtea tractavit, erat illud, utpote diverſum à caeteris, neceſſario ſejunctum à reliquis, iisque ſive ad finem librorum, ſive, quod verius putem, ad initium libri additum, ita tamen, ut Propoſitiones eo pertinentes ſequentibus non annumerarentur. Reliquum deinde Problema, quod ſolum Vieta tractavit, et quod etiam ſolum, aut maxime certe Apollonium occupaverat, eo fere ordine in Propoſitiones particulares diviſum fuiſſe videtur, quem, pro primis quinque Libri prioris Problematibus particularibus, ſequens ſiſtit Sciagraphia.

Probl. I.

Datis duobus punctis, et recta aliqua poſitione data, deſcribere circulum, qui per data puncta tranſeat, rectamque

que positione datam contingat. Erit autem recta positione data vel

I) parallela rectae, quae per data puncta transit (Prop. I.)

vel II) non parallela isti rectae. Tum vero vel

1) unum punctorum datorum erit in recta positione data (Prop. II.)

vel 2) neutrum punctorum datorum erit in recta positione data, et circulus describendus eam tanget

a) ex una parte rectae, quae per data puncta transit (Prop. III.)

b) ex altera parte hujus rectae (Prop. IV.) *)

Probl.

---

*) Apollonium separatim tractasse non solum eos Casus, qui *omnem* tractationem diversam postulabant (qualis est is, quem ad I. indicavimus, comparatus cum iis, qui sub *II.* comprehenduntur, vel is, qui est *II*, 1. comparatus cum iis, qui sunt ad II, 2), sed eos etiam Casus, qui ut hic ad II, 2, a et II, 2, b eandem prorsus tractationem admittunt, at situm tantum quarundam linearum paullo diversum habent, sive ut aliter dicam, eos etiam Casus, qui generalius paullo expressi duplicem *semper* aut multiplicem admittunt Solutionem, indicat potissimum Pappi Lemma XIII comparatum cum Lemmate XIV, ac universus etiam, qui ita consentiens cum Pappi inscriptionibus deprehenditur, ordo Propositionum. Eos vero casus, qui non *semper*, sed *nonnunquam* saltim pro singulari Datorum natura, duplicem aut multiplicem admittunt Solutionem, non separatim tractatos fuisse, indicat idem iste ordo, ac Lemmata etiam X et XII, quorum utrumque duplicem admittit Solutionem, si recta, quae data puncta conjungit, per datum circulum transeat, dummodo duo data puncta sint ex eadem circuli parte in Lemmate X, et è diversis partibus circuli in Lemmate XII.

Probl. II.

Duabus rectis positione datis, datoque puncto aliquo, describere circulum, qui per datum punctum transeat, atque utramque rectam positione datam contingat. Erunt rectae positione datae vel

I) inter se parallelae, ac

1) punctum datum positum erit in altera rectarum positione datarum (Prop. V.) (Patet adhiberi hic Lemm. I quod etiam inscriptio refert ad Prop. IV.)

2) punctum datum positum erit in neutra rectarum positione datarum, circulus autem describendus tanget utramque rectam positione datam

a) ex una parte perpendiculi à dato puncto ad rectas positione datas demissi (Prop. VI.)

b) ex altera parte hujus perpendiculi (Prop. VII.)

II) non inter se parallelae, ac punctum datum positum erit

1) in altera rectarum positione datarum, circulus autem describendus tanget rectam, in qua non est punctum datum

a) ex una parte ejus rectae, in qua est punctum datum (Prop. VIII.)

b) ex altera parte hujus rectae (Prop. IX.)

2) in neutra rectarum positione datarum, ac circulus describendus tanget has rectas inter se concurrentes

a) ex una parte perpendiculi, quod à puncto dato ducitur ad rectam, quae bifariam dividit angulum à rectis datis effectum, intra quem situm est punctum datum (Prop. X.) (Ad hanc Propositionem pertinet Pappi Lemma II, quod nullam habet inscriptionem)

b) ex altera parte hujus perpendiculi (Prop. XI.)

Probl. III.

Duobus punctis datis, atque circulo aliquo positione ac magnitudine dato, describere circulum, qui data duo puncta, datumque circulum contingat. Datorum punctorum vel

I) unum est in circumferentia circuli dati, ac

1) circulus describendus datum extra contingere debet, altero punctorum datorum posito

a) in recta producta, quae centrum circuli dati, ac punctum in ejus circumferentia datum conjungit (Prop. XII.) (Pertinet huc Pappi Lemm. III, cujus inscriptio hanc ipsam Propositionem indicat, ac Lemm. IV, quod nullam habet inscriptionem)

b) non in hac recta producta (Prop. XIII.)

2) circulorum, describendi ac dati, unus, alterum intra contingit, atque alterum punctorum datorum positum est

a) in recta, quae centrum circuli dati, ac punctum in ejus circumferentia datum jungit, ipsa, si circulus datus intra contingi debet, vel producta, si circulus datus intra contingere debet circulum describendum (Prop. XIV.) (Pertinent huc Lemmata V et VI, quorum neutrum habet inscriptionem.)

b) non in hac recta (Prop. XV.)

vel II) neutrum est in circumferentia circuli dati, ac

1) circulus describendus datum extra contingit (Prop. XVI.) (Pertinent huc Lemmata VII, IX et X, quorum inscriptiones indicant Prop. XVI. Lemma autem VIII inservit Demonstrationi Lemmatis IX)

2) circulus describendus à dato intra contingi debet (Prop. XVII.) (Pertinent huc Lemmata XI et XII, quorum etiam inscriptio indicat Propositionem XVII)

3) circulus describendus datum intra contingere debet, et quidem

a) ex una parte rectae, quae data puncta conjungit (Prop. XVIII.) (Lemmatis XIII, quod huc pertinet, inscriptio etiam indicat Prop. XVIII.)

b) ex altera hujus rectae parte (Prop. XIX.) (Eandem hanc Propositionem Lemmatis XIV, quod huc pertinet, inscriptio indicat.)

Probl. IV.

Recta aliqua positione data, et circulo aliquo positione et magnitudine dato, datoque insuper puncto aliquo, describere circulum, qui per datum punctum transeat, lineasque positione datas contingat. Punctum datum erit vel

I) in una linearum datarum, et quidem

1) in perpendiculo demisso ex centro circuli dati in rectam positione datam, et circulus describendus

a) circulum datum extra contingit (Prop. XX.)

b) à circulo dato intus contingitur (Prop. XXI.)

c) circulum datum intus, rectam vero positione datam contingit.

A) ex una ejus parte (Prop. XXII.)

B) ex altera ejus parte (Prop. XXIII.)

2) non in perpendiculo demisso ex centro circuli dati in rectam positione datam, et circulus describendus

a) circulum datum extra contingit (Prop. XXIV.) (Pertinet huc Lemma XV, cujus etiam inscriptio indicat Prop. XXIV.)

b) à circulo dato intus contingitur (Prop. XXV.) (Pertinet huc Lemma XVI, quod etiam inscriptioni ipsius consentaneum est)

c) cir-

c) circulum datum intus, rectam vero positione datam contingit

A) ab una ejus parte (Prop. XXVII.)

B) ab altera ejus parte (Prop. XXVII.) *)

vel II) in neutra linearum positione datarum, et

1) recta positione data tangit circulum datum, et punctum datum

a) non est ex eadem rectae positione datae parte, ex qua est circulus datus, et describendus est circulus, qui datum extra contingat (Prop. XXVIII.)

b) punctum datum est ex eadem rectae positione datae parte, ex qua est circulus, et circulus describendus

A) a dato circulo intus contingi debet (Prop. XXIX.)

B) datum circulum intus contingere debet (Prop. XXX.)

d 2 2) re-

*) Putare quis possit, male nos separare Propos. XXII et XXIII, pariterque XXVI et XXVII, quum, si punctum datum sit in circulo, una saltim Solutio locum habeat. At Apollonium rem ita tractasse, opinor, quod ita tantum Lemmata XV et XVI Propositionibus in Inscriptionibus indicatis respondent. Ac erat sane caussa aliqua ita agendi. Nempe quum brevitatis gratia in Propositionibus XX — XXVII Casus, quibus punctum datum positum est in circulo dato, conjunxisset cum iis, quibus positum est in recta positione data, ac hi posteriores duplicem *semper* in Prop. XXII et XXIII, pariterque XXVI et XXVII *requirant* Solutionem, priores vero *admittant*, dummodo in Determinatione situs puncti dati ex una vel altera parte rectae positione datae indicetur, poterat eosdem Casus etiam hic conjunctim tractare, adeoque separare Propositiones, quae necessario separari debent, si punctum datum sit in recta positione data.

2) recta positione data plane non, aut certe non sub iisdem reliquis conditionibus, ac ante dictum, tangit circulum datum, et circulus describendus

a) circulum datum extra contingit (Prop. XXXI.) (Lemma XVII, cujus Inscriptio Propositionem XXXI indicat, potest quidem huic Propositioni adhiberi, at fateor, me neque hic, neque alibi ullum necessarium hujus Lemmatis usum videre: Lemma vero XVIII, quod nullam habet inscriptionem, huc pertinet.)

b) à circulo dato intus contingitur (Prop. XXXII.) *)

c) circulum datum intus contingit, ducta autem diametro circuli dati perpendiculari ad rectam positione datam, ductaque recta ad punctum datum ex eo hujus diametri termino, qui non est ex eadem rectae positione datae parte, ex qua est punctum datum, circulus describendus contingit rectam positione datam

A) ex

*) Forte miretur aliquis, utramque Propositionum XXXI et XXXII non in duas divisam esse, pariter ac eam, quae jam duabus Propositionibus XXXIII et XXXIV continetur. At observandum est, esse in XXXI pariter ac XXXII Casum, qui unam saltim admittit Solutionem, eum nempe, quo recta juncta à termino diametri ad punctum datum parallela est rectae positione datae, quod non ita se habet in Propositionibus XXXIII et XXXIV. Suspicor etiam, fortasse Apollonium adeo has duas ultimas una comprehendisse Propositione, quamvis è regula generali distinguendae essent, quod nempe ipsa distinctionis expressio non sine verborum ambagibus fieri potest, quae facilius in ipsa Tractatione, quam in Enunciatione Problematis intelligi poterant.

A) ex una parte rectae junctae à termino diametri ad punctum datum (Prop. XXXIII.)

B) ex altera hujus rectae parte (Prop. XXXIV.)

Probl. V.

Duobus circulis positione ac magnitudine datis, datoque puncto aliquo, describere circulum, qui per datum punctum transeat, datosque circulos contingat. Dati circuli erunt

vel I) ex eodem centro descripti, punctumque datum erit

1) in alterutrius eorum circumferentia, et circulus describendus

a) minorem circulorum datorum extra continget (Prop. XXXV.)

b) à minore circulorum datorum intra contingetur (Prop. XXXVI.)

2) in neutrius circumferentia, et circulus describendus

a) minorem circulorum datorum extra, et quidem

A) ab una parte rectae per centrum circulorum datorum et per punctum datum ductae (Prop. XXXVII.)

B) ab altera parte hujus rectae continget (Prop. XXXVIII.)

b) à minore circulorum datorum intra, et quidem

A) ab una parte rectae per centrum circulorum datorum et per punctum datum ductae (Prop. XXXIX.)

B) ab altera parte hujus rectae contingetur (Prop. XL.)

vel II) non ex eodem centro descripti, et circuli dati

1) se contingunt, et quidem

a) extra, ac circulus describendus

A) alterum datorum extra, alterum intra contingit (Prop. XLI.)

B) ab altero datorum intra contingitur, alterum extra contingit (Prop. XLII.)

b) intra, ac circulus describendus

A) utrumque datorum extra contingit (Prop. XLIII.)

B) utrumque intra contingit (Prop. XLIV.)

C) ab utroque intra contingitur (Prop. XLV.

D) alterum intra contingit, ab altero intra contingitur (Prop. XLVI.)

2) circuli dati se plane non, aut certe non sub iisdem reliquis conditionibus contingunt, et punctum datum est

a) in circumferentia alterutrius circulorum datorum, et quidem

A) in recta, quae centra datorum circulorum conjungit, et circulus describendus

α) utrumque circulorum datorum extra contingit (Prop. XLVII.)

β) alterum datorum extra; alterum intra contingit (Prop. XLVIII.)

γ) alterum extra contingit, ab altero intra contingitur (Prop. XLIX.)

δ) utrumque intra contingit (Prop. L.)

ε) alterum intra contingit, ab altero intra contingitur (Prop. LI.)

ζ) ab utroque intra contingitur (Prop. LII.).

B) non

B) non in recta, quae centra circulorum datorum conjungit, et circulus describendus

α) utrumque circulorum datorum extra contingit, sunt vero circuli dati

a) aequales (Prop. LIII.) (Pertinent huc Lemmata XIX et XX, quorum posterius nullam habet Inscriptionem, prioris Inscriptio indicat Propos. LII. Facile autem fieri poterat, ut pro νγ scriberetur νβ, nisi maluerimus sumere, Propositiones nostras XXXIII et XXXIV conjunctim tractatas fuisse ab Apollonio, quo facto Propositio haec LIII foret utique LII.)

b) inaequales (Prop. LIV.)

β) ab utroque circulorum datorum intra contingitur, sunt vero circuli dati

a) aequales (Prop. LV.)

b) inaequales (Prop. LVI.)

γ) utrumque circulorum datorum intra contingit, sunt vero circuli dati

a) aequales (Prop. LVII.)

b) inaequales (Prop. LVIII.)

δ) alterum circulorum datorum extra, alterum intra contingit (Prop. LIX.)

ε) alterum circulorum datorum extra contingit, ab altero vero intra contingitur (Prop. LX.)

ζ) alterum circulorum datorum intra contingit, ab altero intra contingitur (Prop. LXI.)

b) non in circumferentia alterutrius circulorum datorum, et circulus describendus

 A) utrum-

A) utrumque circulorum datorum extra contingit. Sunt autem dati circuli

α) aequales (Prop. LXII.)

β) inaequales (Prop. LXIII.) (Pertinent huc Lemmata XXI, XXII, XXIII, quae nullam habent Inſcriptionem)

B) ab utroque circulorum datorum intra contingitur. Sunt autem circuli dati

α) aequales (Prop. LXIV.)

β) in aequales (Prop. LXV.)

C) utrumque circulorum datorum intra contingit. Sunt autem circuli dati

α) aequales, et ſi per punctum datum ducatur recta parallela ei, quae data centra conjungit, circulus deſcribendus contingit circulos datos

a) ex una hujus parallelae parte (Prop. LXVI.)

b) ex altera ejus parte (Prop. LXVII.)

β) inaequales, et, ſi in recta, quae data centra conjungit, producta, ſumatur punctum, cujus diſtantia ab utrovis centro dato proportionalis ſit radiis circulorum correſpondentium, et per hoc punctum ac punctum datum ducatur recta, circulus deſcribendus contingit circulos datos

a) ex una hujus rectae parte (Prop. LXVIII.)

b) ex altera ejus parte (Prop. LXIX.)

D) alterum circulorum datorum extra contingit, ab altero vero intra contingitur (Prop. LXX.)

E) al-

E) alterum circulorum datorum extra, alterum vero intra contingit, et, si recta, quae data centra conjungit, dividatur in proportione radiorum adjacentium, ac ducatur per punctum divisionis et per punctum datum recta, circulus describendus contingit datos

α) ex una hujus rectae parte (Prop. LXXI.)

β) ex altera ejus parte (Prop. LXXII.)

F) majorem circulorum datorum intra contingit, a minore vero intra contingitur, ita, ut, si in recta, quae data centra conjungit, producta sumatur punctum, cujus distantia ab utrovis centro proportionalis sit radiis circulorum correspondentium, et per hoc punctum ac punctum datum ducatur recta, circulus describendus contingat datos circulos

α) ex una hujus rectae parte (Prop. LXXIII.)

β) ex altera ejus parte (Prop. LXXIV.)

Reliqua deinde Problemata haec sunt:

Probl. VI.

Duobus circulis positione ac magnitudine datis, rectaque positione data: describere circulum, qui datos circulos rectamque positione datam contingat.

Probl. VII.

Duabus rectis positione datis, et circulo positione ac magnitudine dato: describere circulum, qui rectas positione datas, ac circulum datum contingat.

Probl. VIII.

Tribus circulis positione ac magnitudine datis: describere circulum, qui hos tres circulos contingat.

Haec

Haec tria Problemata, quorum primum priore adhuc libro Apollonii, reliqua duo posteriore libro continebantur, pariter diversos Casus complectuntur, quos facile erit ulterius ad modum praecedentium, ad quae referuntur, persequi. Nos brevitatis studio divisionem eorum instituere omittimus. Duo Problemata, quibus describi debet circulus, qui vel per data tria puncta transeat, vel tres datas rectas contingat, ex Elementis sine dubio nota esse, sumebat Apollonius, addita forte ad finem demum Tractationis suae admonitione, Casum, quo duae rectae datae parallelae sint, similem admittere Solutionem, ac 4, IV. Problemata denique à Ghetaldo postea tractata, ex Pappi descriptione non ab ipso Apollonio, sed à sequioris aevi Geometris addita fuisse videntur. Caeterum horum etiam plenior Tractatio nihil omnino habet difficultatis.

ADDENDA

AD

PROBLEMATIS HISTORIAM.

Thomas Simpson cujus ſupra jam mentionem fecimus, edidit Londini 1752. libellum inſcriptum: *Select Exerciſes for young Proficients in the Mathematicks*, in quo, inter alia nonnulla, plura continentur Problemata Geometrica, Algebraica ſimul ac Geometrica ratione ſoluta. Inter ea Problema 13. circulum deſcribere docet, qui tres circulos aequales ſe contingentes etiam ipſe contingat, Probl. 24. radium circuli triangulo alicui inſcribendi determinat, Probl. denique 57. docet tribus datis punctis invenire quartum, ad quod ductae rectae à punctis datis, datam inter ſe habeant differentiam. Atque in hoc quidem libro Thom. Simpſon haud ſaltim calculi regulas, ſed ipſas etiam formulas, adhibitis tamen variis Subſtitutionibus, ſuppeditavit. Rahnii Scriptum ſupra laudatum inſpicere mihi haud ita pridem contigit. Editum illud eſt Tiguri 1659, non, ut ſupra diximus, 1658. Titulus etiam paululum diverſus ita habet: *Teutſche Algebra, oder algebraiſche Rechenkunſt, zuſamt ihrem Gebrauch, beſtehend 1.) in Auflöſung verworrener mathematiſcher Aufgaben etc.* Problema Vietae propoſitum quomodo ſolvi poſſit, Carteſii primum methodo, deinde alia paullo breviore ratione, paucis oſtenditur p. 179. ſqq. atque ad eum Caſum, quo tres dati circuli ſeſe contingunt, Solutio applicatur. Hugo de Omerique, edito Gadibus 1698 libro, quem inſcripſit: Analyſis Geometrica etc. Problema à Pappo conſervatum, ac noſtris

 Lem-

Lemmatibus M, N, O, P expressum absolvit Libro I. Prop. 43. 44. 45. 46. atque ad Problema Vietanum 8vum applicare docuit. Veronae etiam prodierunt 1769 Josephi Torelli Geometrica, in quibus auctor Problema de describendo circulo, qui datum circulum contingat, ac per duo intra datum circulum data puncta transeat, admodum prolixe, methodo geometrica à pag. 1. usque ad pag. 74. solutum dedit, atque ejusdem deinde Problematis p. 115. sqq. Algebraicam Solutionem subjunxit.

Denique, quum mihi Lipsiae versanti contigisset, in amicitiam venire Celeberrimi Rothe A. M. atque inter quotidianos sermones mentio facta esset de his Apollonii libris, Vir Doctissimus periculum facturus Problema Apollonianum calculi ope aggrediendi, statim in Solutionem incidit Analytico-Trigonometricam Problematis, quod IXnum est apud Vietam, è quo illud de tribus circulis datis, quod Xmo loco apud Vietam recensetur, pendere vidimus. Atque hujus à Doctissimo Rothio propositae Solutionis, quam Calculi brevitas quam maxime commendat, initia saltim tribus adhuc verbis indicabimus. Sint itaque

Fig. 49.

Positione dati circuli ADC (cujus centrum K,) EGF (cujus centrum L) ac punctum J, ac describendus sit circulus JBG, qui datos circulos in punctis B, G extra contingat, et per punctum J transeat. Brevitatis caussa appellentur recta $JK = a$, $JL = b$, $KA = f$, $LE = g$, $OJ = x$, angulus $KJL = m$, angulus $LJO = y$; eritque in triangulo OJK:

OK²

$$OK^2 = JK^2 + OJ^2 - 2\,OJ\,.\,JK.\,\text{cosin}\ KJO$$

vel $x^2 + 2fx + f^2 = a^2 + x^2 - 2ax.\ \text{cosin}\ (m+y)$

adeoque $2x = \frac{a^2 - f^2}{f + a.\ \text{cosin}\ (m+y)}$.

Pariter erit in triangulo OJL:

$$OL^2 = JL^2 + OJ^2 - 2\,OJ.JL.\ \text{cosin}\ LJO.$$

vel $x^2 + 2gx + g^2 = b^2 + x^2 - 2bx.\ \text{cosin}\ y$

adeoque $2x = \frac{b^2 - g^2}{g + b\ \text{cosin}\ y}$.

Itaque $\frac{b^2 - g^2}{g + b.\ \text{cosin}\ y} = \frac{a^2 - f^2}{f + a\ \text{cosin}\ (m+y)}$,

unde fit:

$$b.\ \text{cosin}\ y - \frac{a(b^2 - g^2)}{a^2 - f^2}\ \text{cosin}\ (m+y) = \frac{f(b^2 - g^2)}{a^2 - f^2} - g.$$

Atque hac aequatione, quae nihil jam difficultatis habet, soluta, cosin y invenire, ejusque valore in aequatione:

$$2x = \frac{b^2 - g^2}{g + b\ \text{cosin}\ y}$$

substituto, etiam radium circuli describendi determinare licebit. Ex aequatione supra allata Doctiss. Rothe Constructionem etiam Geometricam deduxit, quae quamvis Vietanae elegantia facile cedat, tamen etiam ipsa, utpote è calculo deducta, satis adhuc simplicitatis habet. Eam hic

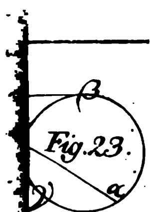
hic afferre ſine figurarum, quae jam Tabulis inciſae ſunt, ope haud licet. Valorem deinde radii circuli deſcribendi ipſis Datis expreſſum ad Problema Vietanum Xmum ita applicavit, ut, in formula inde deducenda, ea quae ex ſimilibus Datis conſequuntur, ipſa etiam expreſſionis ſimilitudine conſpicua manerent, quum nos contra in calculo ad Probl. Viet. Xmum allato brevitati potius formulae, quantum fieri poterat, ſtuderemus, atque ita formulam obtinuit, quoad rem ipſam quidem cum noſtra conſentientem, at quoad partium inter ſe diſpoſitionem paululum diverſam.

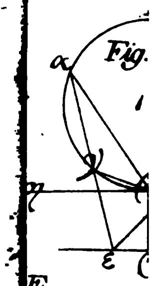
CORRIGENDA.

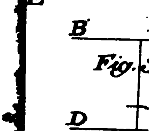
I. IN PROBLEMATIS HISTORIA AC LEMMATIBUS PAPPI.

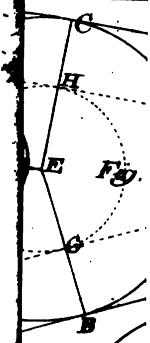
Pag.	2.	lin.	20.	fuerant leg: fuerunt
—	5.	—	6.	Prob-lema leg: Pro-blema
—	6.	—	30.	diſtinguat leg: diſtingueret
—	11.	—	13.	deſtinguantur leg: diſtinguantur
—	12.	—	33.	4vo leg: 4to
—	13.	—	27.	Zumklego leg: Zumkleyo
—	14.	—	19.	εινα leg: ειναι
—	15.	—	8.	εκ leg: εν
—	—	—	9.	ημειν leg: ημην
—	16.	—	2.	δευτερῳ leg: δευτέρῳ
—	—	—	9.	ἄ παντα leg: ἄπαντα
—	—	—	17.	ἐξ leg: ἕξ
—	—	—	19.	ἔυθείας leg: εὐθείας
—	17.	—	8.	tranſeat leg: tranſeat,
—	20.	—	13.	ἀι leg: αἱ
—	24.	—	8.	ἐστι leg: ἐστὶ
—	27.	—	16.	δεθεισα leg: δοθεισα
—	28.	—	23.	κὺκλων leg: κύκλων
—	29.	—	8.	ιση leg: ἴση
—	—	—	9.	και η βγ αρα τῃ τε εστιν ιση. αλλα παραλληλος εστιν. Haec verba, bis repetita, ſemel delenda ſunt.

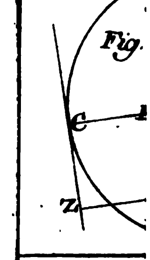
Pag.

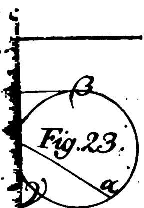

β
Fig.23.
α
γ

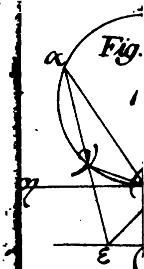

α
Fig.
η
ε

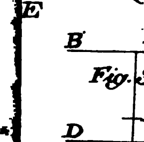

E
B
Fig.
D

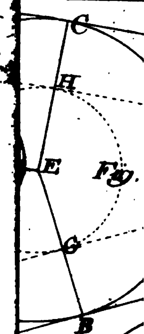

C
H
E
Fig.
G
B

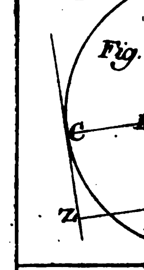

Fig.
C
Z

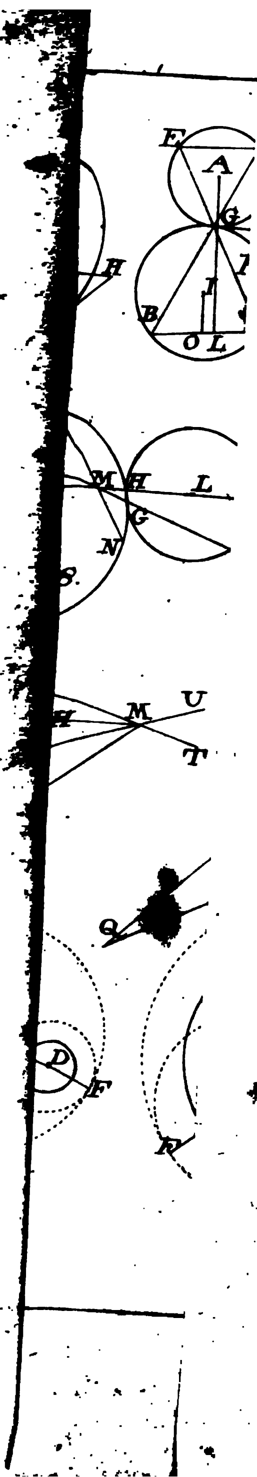

β
Fig.23.
α
γ


α
Fig.
γ
η
ε
E


B
Fig.
D


C
H
E
Fig.
G
B


Fig.
C
Z



E
A
G
H
I
B
O
L
M
H
L
G
N
B
H
M
U
T
Q
D
F
F

